Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Е.В. Хорошилова

КУРС СЕМИНАРОВ

ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

(Самоучитель)

Книга 1

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА И ИХ МНОЖЕСТВА.
ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ.
ФУНКЦИИ ОДНОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ:
ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Учебное пособие
для очной и дистанционной форм обучения
студентов университетов

Москва–2021

УДК 378.4:517.1:517.2:517.5

ББК 22.16

Х82

Печатается по решению Редакционно-издательского совета факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова

Рецензенты:

Хорошилова Е.В.

Х 82 Курс семинаров по математическому анализу: Самоучитель. – В 4-х кн. – Кн. 1: Действительные числа и их множества. Числовые последовательности. Функции одной действительной переменной: предел и непрерывность. – Учеб. пособие для очной и дистанционной форм обучения студентов университетов. – М.: МАКС Пресс, 2021. – 421 с.

Пособие посвящено отработке навыков основных видов исследований по темам «Действительные числа и их множества», «Числовые последовательности», «Предел и непрерывность функции одной действительной переменной», изучаемым в курсе классического анализа. В книге приводятся необходимые теоретические сведения, при этом основной акцент делается на систематизации *приёмов и методов решения задач*. Изложение методов сопровождается разбором примеров и задачами разных типов для самостоятельного решения (с подробными решениями).

Книга включает более 606 задач и 179 примеров и будет полезна как задачник для работы в течение семестра, как справочное пособие по методам решения задач, а также при подготовке к контрольным и зачётным работам.

Рекомендуется студентам младших курсов университетов, обучающимся математическим специальностям. Библ. 22.

УДК 378.4: 517.1: 517.2: 517.5
ББК 22.16

© Факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова, 2021
© Хорошилова Е.В., 2021

ISBN 000-0-00000-000-0

Содержание

Предисловие 12

1 СЕМИНАР (2 вводных занятия): Техника дифференцирования функций одной переменной 20

1.1 Понятие производной. Таблица производных . . 22

1.2 Дифференцирование суммы, произведения, частного, сложной и обратной функций 24

1.3 Производная показательно-степенной функции . 27

1.4 Производная произведения трёх и более функций 28

1.5 Другие приёмы дифференцирования функций . 30

1.6 Задачи для самостоятельного решения 32

1.7 Ответы и решения 37

1.8 ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Гиперболические функции и формулы 46

2 СЕМИНАР: Доказательство тождеств, неравенств и их применение как необходимый аппарат для решения задач математического анализа 50

2.1 Известные тождества и неравенства 51

2.1.1 Формула квадрата $(a_1+a_2+...+a_n)^2$ суммы n чисел 51

2.1.2 Формула разложения на множители разности $a^n - b^n$ $(n \in \mathbb{N})$ 52

2.1.3 Формула разложения на множители суммы нечётных степеней $a^n + b^n$ $(n = 2k+1)$ 52

2.1.4 Формула разложения на множители разности чётных степеней $a^n - b^n$ $(n = 2k)$. 53

2.1.5 Бином Ньютона $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$. 53

2.1.6 Полиномиальная теорема: обобщение бинома Ньютона $(a_1 + a_2 + ... + a_m)^n$ 54

2.1.7 Неравенство о сумме взаимно обратных чисел $\left|a+\frac{1}{a}\right| \geqslant 2$ $(a \neq 0)$ и его обобщение 55
2.1.8 Формула сложного радикала $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ . . 55
2.1.9 Неравенство треугольника $|x+y| \leqslant |x|+|y|$ и его обобщение 56
2.1.10 Обратные тригонометрические функции. Некоторые тригонометрические неравенства $|\sin x| \leq |x|$, $|\arcsin x| \geqslant |x|$ и др. Тригонометрические и гиперболические подстановки 57
2.1.11 Среднее степенное $\left(\frac{x_1^p+x_2^p+\ldots+x_n^p}{n}\right)^{1/p}$ и его свойства 62
2.1.12 Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$, ... 64
2.1.13 Неравенство между средним геометрическим и средним гармоническим $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}$. . . . 65
2.1.14 Неравенство Коши–Буняковского (Шварца) $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2$ 66
2.1.15 Неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным $\frac{x_1+\ldots+x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{n}}$ 67
2.1.16 Неравенства Бернулли $(1+x)^n \geq 1+nx$. 67
2.1.17 Неравенство Минковского о произведении сумм обратных чисел $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geq n^2$. 68
2.1.18 Транснеравенства 68
2.1.19 Неравенства Чебышёва $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \geq \left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)$ 70

2.1.20 Неравенства Гёльдера
$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q} \quad (p>1)$$. 72
2.2 Математическая индукция и другие методы доказательства тождеств и неравенств 72
2.3 Задачи для самостоятельного решения 76
2.4 Ответы и решения 83

3 СЕМИНАР: Действительные числа и их множества 99
3.1 Теория действительных чисел 99
3.1.1 Конструктивные подходы к определению действительного числа. Рациональные и иррациональные числа 99
3.1.2 Аксиоматические подходы к определению действительного числа 104
3.2 Теория множеств действительных чисел 106
3.2.1 Общие определения. Равные множества. Подмножества 106
3.2.2 Основные операции над множествами . . 108
3.2.3 Виды множеств на числовой прямой . . . 109
3.2.4 Мощность множества. Счётные и несчётные множества. Теорема Кантора 113
3.2.5 Логические кванторы и высказывания. Составление отрицаний 116
3.2.6 Ограниченные (неограниченные) множества. Точные грани 118
3.2.7 Примеры на меру Лебега некоторых измеримых множеств$^{(*)}$ 122
3.3 Задачи для самостоятельного решения 124
3.4 Ответы и решения 128

4 СЕМИНАР: Последовательности действительных чисел 139

4.1 Понятие числовой последовательности. Ограниченные последовательности. Точные грани. Способы задания. Арифметические операции 140
4.2 Предел последовательности. Сходящиеся и расходящиеся последовательности и их свойства . . 144
4.3 Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности 151
4.4 Неэлементарные функции, определяемые как предел последовательности 153
4.5 Задачи для самостоятельного решения 154
4.6 Ответы и решения 159

5 СЕМИНАР: Приёмы и методы вычисления пределов последовательностей 169

5.1 Задачи на доказательство, решаемые с использованием определения предела 169
5.2 Пределы вида $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{P_k(n)}{Q_m(n)}$, где $P_k(n)$, $Q_m(n)$ – алгебраические многочлены, а также некоторые другие неопределённости типа $\frac{\infty}{\infty}$ 170
5.3 Сведение к известным пределам 172
5.4 Вычисление предела рекуррентно заданной последовательности 174
5.5 Замена переменной под знаком предела 176
5.6 Использование формул сокращённого умножения 177
5.7 Вычисление предела последовательности с помощью умножения на сопряжённое выражение. Раскрытие неопределённостей вида $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$ 178
5.8 Предварительные преобразования выражений под знаком предела 179
5.9 Использование соотношений эквивалентности . 181
5.10 Пределы вида $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(n)g(n))$, где $f(n)$ – ограниченная последовательность, а $g(n)$ – бесконечно малая 183

5.11 Использование принципа двусторонней ограниченности 183
5.12 Когда предел последовательности не существует 185
5.13 Показательно-степенные последовательности и их пределы. Раскрытие неопределённостей 0^0, ∞^0, 1^∞ 186
5.14 Другие приёмы вычисления пределов последовательностей 188
5.15 (*)Вычисление предела последовательности переходом к пределу функции 189
5.16 (*)Критерий Коши и теорема сравнения при исследовании сходимости числовой последовательности 190
5.17 (*)Теорема Штольца и её применение при вычислении пределов последовательностей 192
5.18 (*)Вычисление предела последовательности как предела интегральной суммы 192
5.19 Ответы и решения 194

6 СЕМИНАР: Монотонные последовательности. Сходимость монотонной ограниченной последовательности 215

6.1 Монотонные последовательности и их свойства . 215
6.1.1 Монотонные последовательности и их свойства. Теорема Вейерштрасса о сходимости монотонной ограниченной последовательности 215
6.1.2 Нахождение наименьшего (наибольшего) элементов числовой последовательности . 218
6.2 Задачи для самостоятельного решения 220
6.3 Ответы и решения 224

7 СЕМИНАР: Критерий Коши и теорема сравнения при исследовании сходимости (расходимости) числовой последовательности. Теорема

Штольца **234**

7.1 Критерий Коши сходимости (расходимости) числовой последовательности 234

7.2 Теорема сравнения при исследовании сходимости числовой последовательности 237

7.3 Раскрытие неопределённостей $\frac{\infty}{\infty}$ с помощью теоремы Штольца 238

7.4 Средние величины $x_1, x_2, ..., x_n$ имеют тот же предел, что и сама последовательность $\{x_n\}$ . . 239

7.5 Задачи для самостоятельного решения 240

7.6 Ответы и решения 243

8 СЕМИНАР: Подпоследовательности. Предельные точки последовательности. Верхний и нижний пределы **259**

8.1 Понятие подпоследовательности. Предельные точки. Принцип Больцано-Вейерштрасса 259

8.2 Нижний и верхний пределы и их свойства 261

8.3 Задачи для самостоятельного решения 265

8.4 Ответы и решения 268

ФУНКЦИИ ОДНОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ **275**

9 СЕМИНАР: Понятие функции. Ограниченность. Точные грани функции. Предел функции **275**

9.1 Понятие функции одной переменной 276

9.2 Монотонные и немонотонные функции 276

9.3 Ограниченные и неограниченные функции. Точные грани функции. Наибольшее и наименьшее значения 278

9.4 Предел функции по Гейне и Коши. Односторонние пределы. Необходимое и достаточное условие существования предела в точке 281

9.5 Свойства пределов 289
9.6 Бесконечно малые и бесконечно большие функции 290
9.7 Задачи для самостоятельного решения 292
9.8 Ответы и решения 296

10 СЕМИНАР: Приёмы и методы вычисления пределов функций 304

10.1 Пределы, не содержащие неопределённостей . . 304
10.2 Применение 1-го, 2-го замечательных и других известных (табличных) пределов 305
10.3 Раскрытие неопределённостей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ путём сокращения дроби на общий множитель, являющийся причиной неопределённости 307
10.4 Домножение (деление) на сопряжённое выражение 309
10.5 Переход к пределу в отдельных сомножителях. Разбиение одного предела на два (несколько) пределов 310
10.6 Замена переменной под знаком предела 311
10.7 Пределы вида $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x))$, где $f(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$ функция, а $g(x)$ – ограниченная функция 313
10.8 Использование соотношений эквивалентности . . 314
10.9 Пределы вида $\lim\limits_{x\to a}(f(x)^{g(x)})$, где $f(x) \to 1$, а $g(x) \to \infty$ при $x \to a$ 316
10.10 Когда предел не существует или зависит от параметра 318
10.11$^{(*)}$ Вычисление пределов $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ для дифференцируемых в точке a функций 319
10.12$^{(*)}$ Вычисление пределов функций с помощью разложений по формуле Тейлора (для дифференцируемых функций) 320
10.13$^{(*)}$ Правило Лопиталя для дифференцируемых функций 320

10.14Ответы и решения 321

11 СЕМИНАР: Приёмы и методы вычисления пределов функций (продолжение) 334

11.1 Задачи для самостоятельного решения 334

11.2 Ответы и решения 339

12 СЕМИНАР: «О»–символика: о–малое, О–большое. Порядки малости и роста 353

12.1 Асимптотическое поведение функций 353

12.2 Бесконечно малые и бесконечно большие в точке функции: обозначения и свойства 354

12.3 Понятие o-малого. Порядок малости 356

12.4 O–большое, O^* (О–большое со звёздочкой). Функции одного порядка малости (роста). Асимптотически эквивалентные функции. 359

12.5 Понятие главного члена функции 362

12.6 Задачи для самостоятельного решения 365

12.7 Ответы и решения 368

13 СЕМИНАР: Непрерывные функции. Точки разрыва. Локальные свойства 376

13.1 Понятие непрерывности функции в точке и на множестве. Односторонняя непрерывность. Кусочно непрерывные функции 376

13.2 Понятие разрывности функции в точке. Классификация точек разрыва 380

13.3 О точках разрыва монотонной функции. Критерий непрерывности монотонной функции 382

13.4 Локальные свойства непрерывных функций. Теоремы Вейерштрасса 383

13.5 Задачи для самостоятельного решения 385

13.6 Ответы и решения 389

14 СЕМИНАР: Свойства непрерывных функций (продолжение). Равномерная непрерывность 399

14.1 Глобальные свойства непрерывных функций: теоремы Больцано-Коши, непрерывность обратной функции 399

14.2 Понятие равномерно непрерывной функции. Теорема Кантора 402

14.3 Задачи для самостоятельного решения 405

14.4 Ответы и решения 407

Самостоятельная работа для самопроверки 414

Предметный указатель 415

Список литературы 419

Предисловие

I.

«Дистанционная форма обучения является разновидностью очной формы образовательного процесса».

«Интерфаксу» – пресс–служба МГУ, 18 ноября 2020 г.

Пандемия продолжает вносить изменения в стандартный формат получения высшего образования в России. Так, 08.08.2021 были опубликованы рекомендации Министерства образования и науки РФ (с 21 января 2020 года пост министра занимает Фальков В.Н.), в которых вузам страны предписывается, в частности, перевести студентов, которые не привиты от коронавируса или же имеют медотвод, на дистанционный формат обучения. В министерстве также посчитали целесообразным требовать справки о вакцинации, перенесенной болезни или медицинском отводе при заселении в общежитие, проводить для тех, кто не привился, экзамены отдельно, а также организовать вакцинацию иностранных студентов за счёт учебного заведения». Однако уже 10 августа Минобрнауки РФ заявило, что готово скорректировать свои рекомендации по вакцинации студентов от коронавируса. В ведомстве сообщили, что отсутствие у студента прививки от ковида не может быть причиной не пускать его в общежитие или кампус.

«В МГУ имени М.В. Ломоносова к началу 2021/22 учебного года привились от коронавируса 70 процентов сотрудников, а с учётом переболевших иммунитет к COVID–19 должен быть у 90 процентов персонала», – сообщил ректор университета В.А. Садовничий. Долю привившихся студентов он оценил в 30 процентов и уточнил, что в МГУ учатся 60 тысяч человек, работают 20 тысяч, а в общежитиях живут 18 тысяч студентов. «Университет намерен начать учебный год очно, но с разреженной рассадкой студентов», – сказал В.А. Садовничий. «Где нельзя будет студентов рассаживать – например, на лекциях в поточных аудиториях, – занятия будут проводить дистанционно. Наши планы и наши действия: мы будем всех селить с

контролем при поселении температурного режима. Сейчас обсуждаем – может быть, мы введём тесты на коронавирус при заселении», – сказал ректор 10.08.2021.

В 2020/21 учебном году семинарские занятия на 1-м курсе проводились для всех очно, лекции – дистанционно или в записи. Но если в какой-нибудь группе заболевал студент, то вся группа и контактирующие с ней преподаватели отправлялись на 2 недели на карантин. Несмотря на некоторые очевидные удобства, дистанционный формат сильно уступает очному как в плане эффективности обучения, так и в плане социализации молодых людей. Поэтому студентам надо стараться по-возможности использовать все доступные в настоящее время очные формы получения образования, а дистанционные – лишь там, где очные формы в данное время недоступны.

II.

«...Я слышу – и я забыва́ю,
Я вижу – и я запомина́ю,
Я делаю – и я понима́ю».

Китайская пословица.

Чему посвящена эта книга? Курс математического анализа у студентов-математиков традиционно начинается с понятия действительного числа, классификации таких чисел, знакомства с различными подходами к определению действительного числа. Затем переходят ко множествам действительных чисел. Рассматривая различные виды числовых множеств, мы познакомимся с понятиями их ограниченности, точных граней, операциями над множествами, научимся оценивать мощность (аналог количества элементов) бесконечных множеств и сравнивать их по мощности. Для соблюдения правила «сначала лекция, затем семинар», первые 2 занятия мы займём отработкой техники дифференцирования функций одной переменной, поскольку эта тема достаточно независима и к моменту изучения более тонких нюансов дифференцирования вы уже будете обладать необходимыми навыками вычисления производных.

После этого мы изучим теорию числовых последовательно-

стей: что такое последовательность действительных чисел, что означает сходимость последовательности к пределу или её расходимость, каковы свойства сходящихся последовательностей и как определяются арифметические операции над ними. Позже, изучая теорию функций комплексного переменного, вы сможете ознакомиться с последовательностями комплексных чисел.

Наконец, мы перейдём к изучению действительнозначных функций одного действительного аргумента: введём понятия функции, области её определения и множества значений, ограниченности, точных граней, графика функции. Затем обратимся к фундаментальному понятию во всем начальном курсе математического анализа – понятию предела функции, будем рассматривать разные виды пределов и разные способы их определения. При этом мы познакомимся с понятием неопределённости, часто возникающей при вычислении пределов, узнаем, какие виды неопределённостей существуют и как с ними «бороться». Мы узнаем также, что такое бесконечно малые и бесконечно большие в окрестности заданной точки функции и изучим их основные свойства.

После этого уже можно определять непрерывность функции в точке (на множестве), равномерную непрерывность – как отдельный вид непрерывности функции, изучать свойства непрерывных (равномерно непрерывных) функций, классифицировать точки разрыва функций. Познакомимся с неэлементарными функциями и их интересными свойствами.

В дальнейшем вам понадобится умение исследовать произвольную функцию, заданную в декартовой или в полярной системах координат, выявлять её характерные свойства и уметь доказательно обосновывать их, строить график.

Помимо знания теории, к основным навыкам относится умение решать различные задачи вычислительного и, что немаловажно, исследовательского плана, что предполагает развитие творческих возможностей студента для будущих научных изысканий. Именно на начальных курсах, вслед за школой, закладывается и формируется способность человека к научному мышлению, развиваются способности к логическим рассуждениям. Все это необходимо для обучающегося в университете и

чрезвычайно полезно с точки зрения развития интеллектуальных и волевых способностей человека (решение любых, а особенно сложных задач вызывает ваши мыслительные усилий и, тем самым, развивает).

В основу пособия положен курс семинарских занятий для первокурсников, проводимых автором в течение многих лет на факультете ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова. Для успешного усвоения материала всегда рекомендуется предварительно прослушивать лекции по изучаемой теме. Каждый семинар начинается с основных определений, свойств и теорем курса. Акцент делается на разборе основных приёмов и методов решения задач и примерах их использования. В конце каждого семинара приводится подборка задач по теме семинара для самостоятельного решения. Задачи, большей частью, подбирались из разных источников (см. список использованной литературы) или составлялись автором. Следует чётко осознавать, что только решение достаточного количества разнообразных задач позволяет студенту практически усвоить учебный материал, добиваясь необходимой степени понимания и творческого подхода к решению стоящих перед ним задач.

В пособии приводятся более 765 задач и примеров с подробными решениями, что позволяет использовать его не только в качестве задачника в течение семестра, но и как *справочное пособие* при самостоятельном изучении данного раздела математики, а также при подготовке к контрольным и зачётным работам и экзамену. Особенно возрастает роль такого рода *самоучителей* при дистанционном и смешанном обучении.

Вместе с тем, всегда найдутся любознательные студенты, которым разобранных в книге задач будет недостаточно. В этом случае рекомендую обращаться к проверенным временем классическим учебникам по курсу математического анализа (например, трудам Г. М. Фихтенгольца,[1] Л. Б. Кудряв-

[1]Григорий Михайлович *Фихтенгольц* (1888–1959) — русский и советский математик, с 1918 – профессор Петроградского (затем Ленинградского) университета, в котором проработал более сорока лет. Почти все ленинградские математики были в определённой степени его учениками. В разное время его лекции слушали С. Л. Соболев, Л. В. Канторович,

цева[1] и С. М. Никольского,[2] В. А. Ильина,[3] Э. Г. Позняка,[4] В. А. Садовничего,[5] Бл. Х. Сендова,[6] В. А. Зорича[7]), задачни-

---

И. П. Натансон, С. А. Христианович, С. Г. Михлин, Д. К. Фаддеев, и многие другие видные советские математики. Наиболее известен как автор трёхтомника «Курс дифференциального и интегрального исчисления».

[1]Лев Дмитриевич *Кудрявцев* (1923–2012) — математик, член-корреспондент АН СССР. Специалист в области теорий функций, уравнений с частными производными и топологии.

[2]Сергей Михайлович *Никольский* (1905–2012) — советский и российский математик, академик РАН (1991); академик АН СССР (1972). Был главным научным сотрудник МИАНа, профессором МФТИ и мехмата МГУ. В 2005 году в Москве состоялась конференция, посвящённая 100-летию С. М. Никольского, в которой он принял участие.

[3]Владимир Александрович *Ильин* (1928–2014) — советский и российский математик, профессор МГУ, академик РАН. Внёс заметный вклад в теорию дифференциальных уравнений, спектральную теорию дифференциальных операторов и математическое моделирование. Ученик А. Н. Тихонова. Работал на кафедре общей математики факультета ВМК МГУ: профессор (1970—1974), заведующий (1974—2014). Автор более 300 научных работ и соавтор учебников по математическому анализу, аналитической геометрии и линейной алгебре.

[4]Эдуард Генрихович *Позняк* (1923–1993) — математик, профессор кафедры математики физического факультета МГУ, заслуженный деятель науки РСФСР. В 1980 году совместно с В. А. Ильиным стал лауреатом Государственной премии СССР за учебники «Аналитическая геометрия», «Линейная алгебра» и «Основы математического анализа».

[5]Виктор Антонович *Садовничий* (1939) — советский и российский математик. Ректор МГУ им. М. В. Ломоносова (1992). Президент Российского Союза ректоров (1994), председатель Российского совета олимпиад школьников. Академик РАН (1997), вице-президент РАН (2008—2013). Лауреат Государственной премии СССР (1989), Государственной премии Российской Федерации (2002) и трёх премий Правительства Российской Федерации (2006, 2011, 2012). Почётный гражданин Москвы (2008). Полный кавалер ордена «За заслуги перед Отечеством».

[6]Благовест Христов *Сендов* (1932–2020) — болгарский математик и политический деятель. Работы по теории приближений, вычислительной геометрии. Автор более двухсот научных работ, 7 монографий и 30 учебников, в том числе соавтор учебника В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов «Математический анализ». С 1981 — академик, с 1988 по 1991 был председателем Болгарской академии наук.

[7]Владимир Антонович *Зорич* (род. 1937) — советский и российский математик, доктор физико-математических наук (1969), профессор (1971). Заслуженный профессор МГУ (2007). Автор широко известного учебника «Математический анализ»

кам Б. П. Демидовича,[1] Г. Н. Бермана[2] и многим другим отечественным и зарубежным учебникам и задачникам, разработанным преподавателями вузов для студентов, а также проверенным интернет-источникам, научным трудам известных математиков по данной теме и, конечно, лекциям, читаемым для студентов на факультете. Автор выражает искреннюю признательность составителям тех задач, которые использованы в этом учебном пособии и, тем самым, дали ему появиться.

На лекциях и семинарских занятиях, а также самостоятельно работая со специальной литературой и другими источниками, вы, студенты, постепенно изучите разнообразные приёмы и методы математического анализа, а приводимые в книге изречения (цитаты) известных людей, надеюсь, помогут вам настроиться на соответствующий творческий лад.

III.

«Если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду,
а если хотите научиться решать задачи, то решайте их!»
Дьёрдь Пойа (1887–1985),
венгерский, швейцарский и
американский математик,
популяризатор науки.

P. S. Известно, что человек приобретает опыт и развивается в момент преодоления сложностей на своём пути. Успех в учёбе, особенно на 1-м курсе, зависит от вашей базы знаний, с которой вы пришли в университет, но ещё больше он зависит от вашего отношения к учёбе, целеустремлённости и упорства.

[1] Борис Павлович *Демидо́вич* (1906–1977) — советский математик и педагог, специалист в области теории обыкновенных дифференциальных уравнений, функционального анализа, математической физики (ученик А. Н. Колмогорова). Автор одного из наиболее известных в математической среде бывшего СССР сборников задач по математическому анализу.

[2] Георгий Николаевич *Бе́рман* (1908–1949) — советский математик, автор учебников, учебных пособий и научно-популярных книг, которые в период с 1938 по 2015 год изданы общим тиражом свыше 6 миллионов экземпляров.

Жизнь студента (в смысле учёбы) редко бывает лёгкой и безоблачной. Серьёзно учиться – это, вообще говоря, непростая работа. Сделать её интересной и увлекательной, а для кого-то и основой будущей профессии, – ваша задача. Преодолевая трудности, вы сможете добиться успеха.

Желаю успеха в изучении математического анализа и математики в целом. Цель данной книги – помочь вам сделать очередные шаги в этом направлении.

Помните, *это – ваше образование*!

Е.В. Хорошилова, август 2021 г.

Правила работы с книгой дома. Данное учебное пособие построено так: после краткого изложения теории к каждому семинарскому занятию приведён список задач для решения. Частично задачи будут решаться на семинарах, частично – браться на дом в качестве домашнего задания.

1. Прежде чем приступить к решению задач дома, прослушайте лекцию по данной теме, повторите решение задач на последнем семинарском занятии, и лишь потом приступайте к решению новых задач. Внимательно и вдумчиво читайте условия задач. Упорно пытайтесь решить её самостоятельно, опираясь на ваш опыт. Так постепенно у вас сформируется навык самостоятельного решения.

2. Если вы несколько раз пытались решить задачу, но она «не поддаётся», то в этом случае можно заглянуть в приведённое решение, чтобы хотя бы подсмотреть «идею». Пожалуй, лучше посмотреть, как другие решают задачу, чем прийти на следующий семинар с нерешённым заданием. В будущем вы научитесь находить свои решения и, как знать, возможно лучше, чем в «решебнике». Крайне неполезно, не приступая к осмыслению задачи, сразу заглянуть в решение, хотя и есть такой соблазн. Вы сформируете в себе зависимость от решений других людей, что не всегда хорошо. Будьте разумны и вырабатывайте свою тактику, меняйте её по мере совершенствования своих знаний, постепенно становясь всё более самостоятельным.

3. Приветствуется для расширения вашего кругозора дополнительное использование (помимо лекций и другой рекомендованной вашими преподавателями литературы в виде учебников и задачников) любых проверенных источников: классических учебников других авторов, теоретических трудов и научно-популярной литературы по изучаемым темам. Одних лекций и семинаров недостаточно для полноты образования, это лишь необходимый компонент. Если вы не будете читать учебную и, позже, научную литературу, то у вас не сформируется соответствующий навык, что существенно помешает вашему становлению как специалиста.

И не забывайте – хорошо знать теорию должны все! Это помогает решать задачи, накапливая опыт и развивая интуицию.

1 СЕМИНАР (2 вводных занятия): Техника дифференцирования функций одной переменной

«Математику уже затем учить надобно,
что она ум в порядок приводит».

М.В. Ломоносов (1711–1765),
учёный-энциклопедист, основатель
Московского университета.

Задачи к 1-му занятию: 1, 3–5, 7, 9–12, 17, 19–23, 32, 33, 35 (кроме пп. 1.3, 1.4 (частично) и 1.5).

Задачи ко 2-му занятию: 24–26, 28, 29, 37–39, 42, 44, 46–49, 51, 53–56, 60, 61, 63, 68.

Почему мы начинаем семинары с этой темы? Прежде чем приступить к изучению базового курса, который по логике вещей начинается с понятия числа, мы посвятим одно-два семинарских занятия отработке навыков практического дифференцирования. Объясним, почему так.

Вне сомнений, любой студент-математик должен уметь быстро и правильно вычислять производную элементарной функции практически любого уровня сложности, используя все необходимые для этого приёмы. Конечно, усовершенствовать свои навыки в этом направлении можно и позже, когда вы приступите к изучению дифференциального исчисления функций одной действительной переменной (мощный аппарат математического анализа, являющийся базовым в математике). Но для этого нужно время. Так как понятие производной функции опирается на понятие непрерывности функции, а оно, в свою очередь, – на понятие предела функции в точке, то прежде следует ознакомиться с определением функции и теорией числовых последовательностей, а ещё раньше – с понятием действительных чисел и их множеств. Все эти определения с необходимой степенью математической строгости будут даны позже, когда частично будет прослушан курс лекций и вы будете более, чем сейчас, подготовлены к восприятию этого материала.

Данная же тема, с одной стороны, достаточно независима от лекций, так как опирается на уже имеющиеся у первокурсника навыки вычисления производных, полученные в средней школе, и их надо лишь дополнить. С другой стороны, что более важно, мы даём возможность лектору прочитать вводные лекции по теории действительных чисел, чтобы семинарские занятия проходили не до, а после разбора соответствующего материала на лекциях, закрепляя его. Это признанный эффективный способ изучения нового материала.

Что такое дифференциальное исчисление? Содержание данного занятия относится к дифференциальному исчислению функций одной действительной переменной, которое является важнейшей частью *математического анализа*.[1] В дифференциальном исчислении изучаются понятия производной и дифференциала, а также способы их применения к исследованию функций. На ближайших занятиях мы займёмся отработкой практических навыков вычисления производных элементарных[2] функций, в том числе сложных и обратных функций, для чего изучим существующие приёмы дифференцирования. Позже мы вернёмся к дифференциальному исчислению и рассмотрим более тонкие вопросы этого раздела, а пока ближайшая цель – научиться дифференцировать функции одной действительной переменной, поскольку это умение может понадобиться нам раньше других.

[1] *Математический анализ* – совокупность разделов математики, посвящённых исследованию функций и их обобщений методами дифференциального и интегрального исчислений. К анализу относят разделы: дифференциальное и интегральное исчисление, теорию рядов и многомерных интегралов, векторный анализ, а также функциональный анализ вместе с теорией интеграла Лебега, комплексный анализ (ТФКП), нестандартный анализ, изучающий бесконечно малые и бесконечно большие числа, а также вариационное исчисление.

[2] Класс функций, состоящий из многочленов, рациональных функций, показательных функций, логарифмических функций, тригонометрических и обратных тригонометрических функций, гиперболических и обратных к ним функций, а также функций, получающихся из перечисленных выше с помощью четырёх основных арифметических действий и суперпозиций (образование сложной функции), применённых конечное число раз. Производная от Э. ф. также является Э. ф.

Напомним кратко определение, основные свойства производных и приёмы их вычисления, делая акцент на последних. Позже в этом семестре мы вернёмся к теме производной, но на более углублённом математическом уровне.

1.1 Понятие производной. Таблица производных

Пусть функция $y = y(x)$ определена на интервале (a, b) и x_0 – точка из этого интервала. Дадим аргументу x в точке x_0 приращение Δx (действительное число, положительное или отрицательное, обычно считается достаточно малым, так чтобы точка $x = x_0 + \Delta x$ не вышла за пределы интервала (a, b)). Тогда функция получит приращение $\Delta y(x_0) = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$. Составим отношение приращения функции к приращению аргумента $\dfrac{\Delta y(x_0)}{\Delta x}$ и устремим Δx к нулю. Если существует конечный предел этого отношения[1]

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}$$

(не зависящий от способа стремления Δx к нулю), то это число называют *производной* функции $y(x)$ *в точке* $x = x_0$ и обозначают $y'(x_0)$ или $\dfrac{dy(x_0)}{dx}$. Эквивалентная форма определения производной получится, если обозначить $x = x_0 + \Delta x$:

$$y'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0}.$$

В средней школе, пока понятие дифференциала не определено, функция называется *дифференци́руемой в точке* x_0, если она имеет в этой точке конечную производную. В противном случае, когда производная в точке не существует или бесконечна, функция считается недифференцируемой.

Если функция $y(x)$ дифференцируема в каждой точке интервала (a, b), то на этом интервале определена функция

[1] Строгое определение предела функции в точке будет дано позже, поэтому сейчас воспользуйтесь интуитивным представлением.

$y = y'(x)$. Если в задаче требуется найти производную некоторой функции, то по умолчанию производная вычисляется при тех значениях x, при которых она существует, и полагается указывать область существования производной.

Заметим, что для существования производной необходимо, чтобы функция была определена всюду в некоторой (может быть, достаточно малой) двусторонней окрестности точки x_0.

Пример 1. Функция $y = \sqrt{-x^2}$ определена в точке $x_0 = 0$, но не может быть дифференцируемой в этой точке, поскольку не определена в её окрестности. А функция $y = \arcsin x$, определённая на сегменте $[-1, 1]$, дифференцируема лишь внутри этого отрезка, т. е. на интервале $(-1, 1)$. В граничных точках $x = -1$ и $x = 1$ производная не существует, так как функция определена, соответственно, лишь в правой или левой полуокрестностях этих точек. В этих точках речь может идти только о существовании так называемых односторонних производных, но с ними мы познакомимся позже. □

Таблица производных элементарных функций

1. Степенна́я функция: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

2. Показательная функция: $(a^x)' = a^x \ln a$ $(0 < a \neq 1)$, в частности, $(e^x)' = e^x$.

3. Логарифмическая функция: $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ $(0 < a \neq 1,$ $x > 0)$, в частности, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Тригонометрические функции:

4. $(\sin x)' = \cos x,\ \ x \in \mathbb{R}$;

5. $(\cos x)' = -\sin x,\ \ x \in \mathbb{R}$;

6. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}\ \ (\cos x \neq 0)$;

7. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}\ \ (\sin x \neq 0)$.

Обратные тригонометрические функции:

8. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \ x \in (-1, 1)$;

9. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \ x \in (-1,1);$

10. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2},\ \ x \in \mathbb{R};$

11. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2},\ \ x \in \mathbb{R}.$

Гиперболические функции[1]:

12. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x,\ \ x \in \mathbb{R};$

13. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,\ \ x \in \mathbb{R};$

14. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x},\ \ x \in \mathbb{R};$

15. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x},\ \ x \in (-\infty, 0) \bigcup (0, +\infty).$

1.2 Дифференцирование суммы, произведения, частного, сложной и обратной функций

Доказательство следующих свойств (теорем) проводится на лекциях.

1. *Если функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ имеют производные в точке x, то их сумма, разность, произведение и частное также имеют в точке x производные, причём*

$$(u \pm v)' = u' \pm v',\ \ (uv)' = u'v + uv',\ \ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}\ \ (v \neq 0).$$

В частности, при дифференцировании произведения функции $u(x)$ на константу $C \neq 0$ постоянную величину можно выносить из-под знака производной:

$$(Cu(x))' = Cu'(x).$$

Пример 2. Найти производные функций, указав их области определения:

$$\text{а) } y = 5\sqrt[3]{x} + \frac{2}{x} + 7; \quad \text{б) } y = x \operatorname{sh} x; \quad \text{в) } y = \frac{\ln x - 1}{\cos x}.$$

[1] Об определении и свойствах гиперболических функций см. в Приложении 1.

Решение. а) $y' = 5\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + 2\left(x^{-1}\right)' + 7' = 5 \cdot \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 2\left(-x^{-2}\right) =$

$= \dfrac{5}{3\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{2}{x^2},\ x \neq 0;$

б) $y' = (x)' \cdot \operatorname{sh} x + x \cdot (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{sh} x + x \operatorname{ch} x,\ x \in \mathbb{R};$

в) $y' = \dfrac{(\ln x - 1)' \cos x - (\ln x - 1)(\cos x)'}{\cos^2 x} =$

$$= \frac{\frac{\cos x}{x} + (\ln x - 1)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x + x(\ln x - 1)\sin x}{x\cos^2 x},$$

$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$ □

2. *Производная сложной функции*: если функция $u = u(x)$ имеет производную u' в точке x, а функция $h = h(u)$ имеет производную h' в соответствующей точке u, то сложная[1] функция $h(u(x))$ имеет производную в точке x, причём

$$(h(u(x)))'_x = h'_u(u) \cdot u'_x(x), \text{ или просто } (h(u(x)))' = h'(u) \cdot u'(x).$$

Пример 3. Найти производные сложных функций:

$$\text{а) } y = \arcsin(\sin^2 x); \quad \text{б) } y = \operatorname{arctg}(\operatorname{th} x).$$

Решение. Имеем

а) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \sin^4 x}} \cdot 2\sin x \cdot \cos x = \dfrac{2\sin x \cdot \cos x}{\sqrt{(1 - \sin^2 x)(1 + \sin^2 x)}} =$

$$= \frac{2\sin x \cdot \cos x}{|\cos x|\sqrt{1 + \sin^2 x}}.$$

Используя функцию «си́гнум» (знак числа)

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ 1, & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

и тождество $x = |x| \cdot \operatorname{sgn} x$, приведём ответ к виду:

$$y' = \frac{2\sin x \cdot \operatorname{sgn}(\cos x)}{\sqrt{1 + \sin^2 x}},\ \cos x \neq 0.$$

б) $y' = \dfrac{1}{1 + \operatorname{th}^2 x} \cdot \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = \dfrac{1}{1 + \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}} \cdot \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x} =$

[1] Сложную функцию, или композицию функций u и h, иногда обозначают $(h \circ u)(x)$.

$$= \frac{1}{\operatorname{ch} 2x},\ x \in \mathbb{R}.\ \square$$

Пример 4. Найти производные сложных функций (ответ можно не упрощать):

$$\text{а) } y = \lg(\lg(\lg x)); \quad \text{б) } y = \operatorname{tg}\left(\sin\sqrt{x^5+x}\right).$$

Решение. Имеем

$$\text{а) } y' = \frac{1}{\lg(\lg x)\cdot\ln 10}\cdot\frac{1}{\lg x\cdot\ln 10}\cdot\frac{1}{x\ln 10},\ x > 10.$$

$$\text{б) } y' = \frac{1}{\cos^2\left(\sin\sqrt{x^5+x}\right)}\cdot\cos\left(\sqrt{x^5+x}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^5+x}}\cdot(5x^4+1),$$

при условии $\cos\left(\sin\sqrt{x^5+x}\right) \neq 0$, $x^5+x>0$. $\square$

3. *Производная обратной функции:* если функция $x = x(y)$ обратима и имеет производную $x'(y)$ $(\neq 0)$ в точке y, то обратная функция[1] $y = y(x)$ имеет производную в соответствующей точке x, причём $y'(x) = \dfrac{1}{x'(y)}$, или $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$.

Пример 5. Используя свойство производных обратных функций, найти y', если $y = \arccos x$.

Решение. Выражая из уравнения $y = \arccos x$ переменную x через y (для этого применяем к обеим частям этого равенства функцию косинус и используем тождество $\cos(\arccos x) = x$ при $x \in [-1,1]$),

[1] Пусть функция $y = f(x)$ осуществляет взаимно однозначное отображение своей области определения $D(f)$ на область значений $E(f)$ (иными словами, из условия $x_1 \neq x_2$ следует $y_1 \neq y_2$). В этом случае функцию называют *обратимой*, а уравнение $y = f(x)$ можно при любом y однозначно разрешить относительно x, т. е. для каждого y найти единственное соответствующее значение x. Это соответствие определяет функцию, которую называют *обратной* к функции f и обозначают символом f^{-1}. Обозначая в последнем соответствии независимую переменную буквой x, а зависимую – y, получим пару взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$. Их графики симметричны относительно прямой $y = x$, при этом выполняются соотношения:

1) $D(f) = E(f^{-1})$, $E(f) = D(f^{-1})$;

2) $f(f^{-1}(x)) = x,\ \forall x \in D(f^{-1})$; $f^{-1}(f(x)) = x,\ \forall x \in D(f)$;

3) если одна из этих функций строго возрастает (убывает), то вторая также является возрастающей (убывающей);

4) если одна из этих функций нечётная, то и обратная к ней функция также является нечётной.

получим обратную зависимость: $x = \cos y$, $y \in [0, \pi]$. С учётом тождества $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$, при $x \in (-1, 1)$ получаем искомую производную:

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \square$$

1.3 Производная показательно-степенной функции

Рассмотрим приёмы, используемые при дифференцировании показа́тельно-степенны́х[1] функций. Пусть требуется найти производную функции $y = u^v$ $(u > 0)$ в точке x в предположении, что функции $u(x), v(x)$ дифференцируемы в этой точке.

Предварительное логарифмирование. Обратимся к приёму, состоящему в предварительном логарифмировании функции. Прологарифмируем равенство $y = u^v$ по основанию e (возьмём натуральный логарифм):

$$\ln y = \ln(u^v) = v \ln u$$

и затем продифференцируем его по переменной x с учётом, что y есть функция от x:

$$(\ln y)' = (v \ln u)' \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y} \cdot y' = v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u},$$

откуда, умножая на y, находим искомую производную

$$y' = y \left(v' \ln u + \frac{vu'}{u} \right) = u^v \left(v' \ln u + \frac{vu'}{u} \right).$$

Полученную формулу запоминать не сто́ит, гораздо важней запомнить её вывод.

Пример 6. Найти производные показательно-степенных функций, используя предварительное логарифмирование:

$$\text{а) } y = x^x; \quad \text{б) } y = (1 + 4x)^{\operatorname{ctg} x}.$$

[1] Показательно-степенной называется функция u^v, где $u(x), v(x)$ – элементарные функции, $u(x) > 0$.

Решение. а) Прологарифмируем равенство $y = x^x$ при $x > 0$ по основанию e: $\ln y = \ln(x^x) = x \ln x$. Теперь продифференцируем по x полученное равенство:

$$\frac{y'}{y} = (x \ln x)' \quad \Leftrightarrow \quad y' = y \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^x (\ln x + 1).$$

б) Возьмём натуральный логарифм:

$$\ln y = \ln \left((1 + 4x)^{\operatorname{ctg} x} \right) = \operatorname{ctg} x \cdot \ln(1 + 4x),$$

тогда, дифференцируя обе части по x, получаем

$$\frac{y'}{y} = (\operatorname{ctg} x \ln(1+4x))' \Rightarrow y' = y \left(-\frac{1}{\sin^2 x} \cdot \ln(1 + 4x) + \operatorname{ctg} x \cdot \frac{4}{1 + 4x} \right),$$

где $x > -\frac{1}{4}$, $\sin x \neq 0$. □

Переход к экспоненте в основании степени. Рассмотрим ещё один приём дифференцирования показательно-степенных функций, состоящий в переходе к экспоненте:

$$y = u^v = e^{\ln(u^v)} = e^{v \ln u}.$$

Тогда, дифференцируя последнее равенство как сложную функцию, получаем тот же результат, что и выше:

$$y' = (e^{v \ln u})' = e^{v \ln u} (v \ln u)' = u^v \left(v' \ln u + \frac{vu'}{u} \right).$$

Пример 7. Найти y', переходя к экспоненте в основании, если

$$y = x^x.$$

Решение. $y = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$, тогда $y' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x}(\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1)$, $x > 0$. □

1.4 Производная произведения трёх и более функций

Пусть необходимо найти производную функции, имеющей вид произведения нескольких функций. В такой ситуации существуют две возможности.

Производная произведения. Если дифференцируемая функция имеет вид произведения нескольких сомножителей $u = u_1 \cdot u_2 \cdot ... \cdot u_n$, то можно применить формулу дифференцирования произведения

$$(u_1 u_2 ... u_n)' = u_1' u_2 \cdot ... \cdot u_n + u_1 u_2' \cdot ... \cdot u_n + u_1 u_2 \cdot ... \cdot u_n',$$

которая доказывается методом математической индукции.

Пример 8. Найти y', если

$$y = \sqrt[3]{x^4} \cdot \arcsin 2x \cdot 2^{\sin x}.$$

Решение. Так как $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$, то при $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ имеем:

$$y' = (x^{\frac{4}{3}})' \cdot \arcsin 2x \cdot 2^{\sin x} + \sqrt[3]{x^4} \cdot (\arcsin 2x)' \cdot 2^{\sin x} +$$

$$+ \sqrt[3]{x^4} \cdot \arcsin 2x \cdot (2^{\sin x})' = \frac{4}{3} \sqrt[3]{x} \cdot \arcsin 2x \cdot 2^{\sin x} +$$

$$+ \sqrt[3]{x^4} \cdot \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot 2^{\sin x} + \sqrt[3]{x^4} \cdot \arcsin 2x \cdot 2^{\sin x} \cdot \ln 2 \cdot \cos x. \ \square$$

Предварительное логарифмирование. Если же дополнительно известно, что в области дифференцируемости все сомножители положительны, то можно воспользоваться предварительным логарифмированием:

$$\ln(u_1 u_2 ... u_n) = \ln u_1 + \ln u_2 + ... + \ln u_n,$$

после чего полученная сумма дифференцируется (а сумму дифференцировать, вообще говоря, проще, чем произведение):

$$\frac{y'}{y} = \frac{u_1'}{u_1} + \frac{u_2'}{u_2} + ... + \frac{u_n'}{u_n}$$

и в конце умножают на y.

Пример 9. Найти производную функции

$$y = \sqrt[7]{x^3} \cdot \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} \cdot (x^2 + 2x)^3, \ \ x > 1.$$

Решение. Прологарифмируем и упростим для последующего дифференцирования:

$$\ln y = \ln \sqrt[7]{x^3} + \ln \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} + \ln(x^2+2x)^3 \quad \Leftrightarrow$$

$$\ln y = \frac{3}{7}\ln x + \frac{1}{4}\ln(x-1) - \frac{1}{4}\ln(x+1) + 3\ln x + 3\ln(x+2).$$

Дифференцируя теперь полученное равенство, получаем

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{7x} + \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} + \frac{3}{x} + \frac{3}{x+2} \quad \Rightarrow$$

$$y' = y\left(\frac{3}{7x} + \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} + \frac{3}{x} + \frac{3}{x+2}\right), \quad x > 1. \ \square$$

1.5 Другие приёмы дифференцирования функций

Предварительное преобразование функции. Перед дифференцированием функции следует проверить, можно ли её предварительно преобразовать, приведя к виду, удобному для последующего дифференцирования.

Пример 10. Найти производные функций:

$$\text{а) } y = \log_{\sin x} \cos x; \quad \text{б) } y = \lg(\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x).$$

Решение. а) Перейдём к основанию e: $y = \dfrac{\ln\cos x}{\ln\sin x}$, тогда по формуле производной частного имеем

$$y' = \frac{-\operatorname{tg} x \cdot \ln\sin x - \operatorname{ctg} x \cdot \ln\cos x}{\ln^2 \sin x},$$

где $\sin x \cos x > 0$, $\sin x \neq 1$.

б) Так как $y = \lg(\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x) = \lg 1$, то $y' \equiv 0$. $\square$

Использование особенностей функции. Иногда при дифференцировании используются специальные упрощающие приёмы, учитывающие специфику функции.

Пример 11. Найти $f'(1)$, если

$$f(x) = (x-1)\left(\sqrt[4]{x+\sqrt{x}-1} + (x-1)\sqrt[5]{x+2\sqrt[4]{x}}\right).$$

Решение. Не будем действовать стандартно: дифференцировать функцию и затем вычислять полученную производную в точке $x = 1$. Поступим иначе. Функция имеет вид $f(x) = (x-1)g(x)$, где $g(x) = \sqrt[4]{x+\sqrt{x}-1} + (x-1)\sqrt[5]{x+2\sqrt[4]{x}}$ – дифференцируема в точке $x = 1$. Продифференцируем $f(x)$ в общем виде: $f'(x) = g(x) + (x-1)g'(x)$, откуда $f'(1) = g(1)$. Заметим, что при таком решении не понадобилась производная в общем виде, но если бы производную надо было вычислить в любой другой точке, отличной от 1, то этот приём не сработал бы. Здесь же легко находится $g(1) = 1$, поэтому $f'(1) = 1$. □

Введение промежуточной переменной и сведение к сложной функции. Если переменная x в записи функции присутствует только в составе некоторого повторяющегося выражения, то это выражение целесообразно заменить новой переменной, и затем воспользоваться формулой для дифференцирования сложных функций.

Пример 12. Найти производную функции, вводя промежуточную переменную и используя правило дифференцирования сложной функции:

$$y = \frac{5\sin^2 x + 1}{\ln(\sin x + 2)}.$$

Решение. Введём промежуточную переменную $t = \sin x$ и получим суперпозицию функций $y = u(t(x))$, где $u(t) = \dfrac{5t^2+1}{\ln(t+2)}$. По теореме о дифференцировании сложной функции получим

$$y'(x) = u'(t)\cdot t'(x) = \frac{10t\ln(t+2) - (5t^2+1)\cdot\frac{1}{t+2}}{\ln^2(t+2)}\cdot\cos x.$$

(здесь всего лишь один раз в самом конце осуществляется умножение на $t'(x)$). □

1.6 Задачи для самостоятельного решения

Найти производные сложных функций с указанием их области дифференцируемости:

№1. [6, №901] $y = \ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)$;

№2. $y = \log_7(\cos^5 x)$;

№3. [6, №969] $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{th} x)$;

№4. [6, №970] $y = \arccos\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$;

№5. [6, №968] $y = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} - \ln\left(\operatorname{cth}\dfrac{x}{2}\right)$;

№6. $y = \sin^5(\cos^2 x)$;

№7. [6, №864] $y = \sin(\cos^2 x)\cdot\cos(\sin^2 x)$;

№8. $y = 10^{\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{x^2-8}}$;

№9. [6, №888] $y = \ln(\ln^2(\ln^3 x))$;

№10. [6, №910] $y = \ln\left(\dfrac{1}{x} + \ln\left(\dfrac{1}{x} + \ln\dfrac{1}{x}\right)\right)$;

№11. [6, №922] $y = \arccos(\cos^2 x)$;

№12. [6, №924] $y = \arccos\sqrt{1-x^2}$;

№13. [6, №859] $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}\cdot(x+\sqrt{1+x^2})}$;

№14. $y = \sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x+3x^2}}}$;

№15. [6, №898] $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \dfrac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$;

№16. [6, №940] $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$;

№17. [6, №905] $y = -\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x} + \ln\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{\sin x}}$;

№18. [6, №938] $y = \dfrac{\arccos x}{x} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$;

№19. [6, №955] $y = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}} - \dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\dfrac{\sqrt{1+x^4}-x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2}}$;

№20. [6, №965] $y = (\ln x)^x : x^{\ln x}$.

Используя формулу дифференцирования произведения нескольких функций, найти производную:

№21. [6, №842] $y = (1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^3$;

№22. [6, №884] $y = \left(\frac{a}{b}\right)^x \cdot \left(\frac{b}{x}\right)^a \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^b$ $(a > 0, b > 0)$.

№23. Найти $y'(0)$, если $y = x(x-1)(x-2)(x-3)...(x-2000)$.

Найти производную, вводя промежуточную переменную и затем дифференцируя как сложную функцию:

№24. [6, №972] $y = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^4 x})$;

№25. [6, №974] $y = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt[4]{1+x^4}\right) + \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+1}{\sqrt[4]{1+x^4}-1}$;

№26. $y = e^{n\ln x}(\cos(n\ln x) + \sin(n\ln x))$;

№27. [6, №959] $y = e^{m\cdot\arcsin x}(\cos(m\cdot\arcsin x) + \sin(m\cdot\arcsin x)))$.

Объяснить, почему функция не дифференцируема ни в одной точке:

№28. $y = \sqrt{\log_2(\sin x)}$;

№29. $y = \sin(\arccos(\operatorname{ch}(x^2))) \cdot \cos(\arcsin(\operatorname{ch}(x^2)))$;

№30. $y = \arcsin\left(\operatorname{sh}^4(x + 4\sin(xe^{\pi x})) + 2^{x^2+1}\right)$.

№31. Найти производную функции

$$y = \frac{1}{\operatorname{th}^{100}(\ln(x+\sqrt{x^2-1}) + \ln(x-\sqrt{x^2-1}))}.$$

По свойству производных обратных функций найти y':

№32. $y = \operatorname{arctg} x$;

№33. $y = \log_a x$.

№34. Найти обратную функцию и её производную, если

$$y = \frac{2x+3}{5x-2}.$$

№35. Найти производную функции $y = \operatorname{arsh} x$ (ареасинус), являющейся обратной к гиперболическому синусу $y = \operatorname{sh} x$, двумя способами:

а) найдя ареасинус и затем продифференцировав его;

б) по теореме о производной обратной функции (не находя ареасинуса в явном виде).

№36. Известно, что функция f удовлетворяет уравнению $f\left(\frac{1}{2}(4^y + 4^{-y})\right) \equiv y$ для любого $y \geq 0$. Найти производную обратной функции f^{-1} и установить её знак.

№37. Найти y', если $y = \ln(x + \ln(x + \ln(x + ...)))$.

№38. Найти y', если $y = \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x + ...}}}$.

Найти производную, предварительно упростив функцию:

№39. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$;

№40. $y = \sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}}$, где $x \in (10, 17)$;

№41. $y = \ln\{x^2 + 5\}$, где $x \in (\sqrt{3}, 2)$, $\{\cdot\}$ – дробная часть;

№42. $y = \dfrac{2\,\mathrm{th}\, x}{1 + \mathrm{th}^2 x}$;

№43. $y = 4\,\mathrm{sh}^3 x + 3\,\mathrm{sh}\, x$;

№44. $y = \arcsin(\cos(\arcsin x)) + \arccos(\sin(\arccos x))$;

№45. $y = \sin(2\arccos x)$;

№46. $y = \arccos(\cos x)$, где $x \in (\pi, 2\pi)$.

Указание: воспользоваться тем, что

$$\arccos(\cos x) = \begin{cases} x - 2\pi n, & \text{если } x \in [2\pi n, \pi + 2\pi n], \\ -x + 2\pi n, & \text{если } x \in [-\pi + 2\pi n, 2\pi n], \end{cases} n \in \mathbb{Z}.$$

№47. При всех $a \in \mathbb{R}$ найти производную функции

$$y = \frac{x^2 - a}{x^2 - a}.$$

№48. Пусть $f(x) = x^2 + 12x + 30$. Найти производную функции $y = f(f(f(f(f(x)))))$.

Предварительно логарифмируя, найти производную:

№49. $y = x^{e^x} \cdot x^9$;

№50. $y = x^{a^x}$, $a > 0$;

№51. $y = \ln \sqrt[5]{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

№52. $y = \dfrac{\sqrt{x+2}\cdot(3-x)^6}{(x-1)^3\cdot\sqrt[4]{3x-2}},\ x>3.$

Найти y', переходя к экспоненте в основании:

№53. $y = (1+4x)^{\operatorname{ctg} x}$.

Найти производные показательно-степенных функций:

№54. [6, №963] $y = x^{\frac{1}{x}}$.

№55. [6, №962] $y = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x}\ (a>0,\ x>0)$;

№56. [6, №964] $y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$.

№57. $y = (x^2+1)^{\cos\frac{x}{2}}$.

№58. [6, №883] $y = e^x + e^{e^x} + e^{e^{e^x}}$.

Найти производную, предварительно приведя функцию к явному виду:

№59. Найти производную неявно заданной функции, приведя её к явному виду $y = y(x)$: $\sqrt[3]{xy} = \sin(\log_5 x)$.

№60. Найти $y'(x)$, приведя функцию, заданную параметрически системой

$$\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \arccos t, \end{cases}$$

где параметр $t \in [-1,1]$, к явному виду.

№61. Найти производную $g'(x)$, если известно, что при всех $x \in \mathbb{R}$ функция $g(x)$ задана неявно системой уравнений $f(x) = 5-2x$, $f(2-3g(x)) = 13-24x$.

№62. Найти f', если известно, что функция f удовлетворяет при любых действительных x и y уравнению

$$f(x-y) = f(x) + f(y) - 2xy.$$

№63. Найти f', если известно, что функция f удовлетворяет при любых действительных x уравнению

$$2f(x) + f(1-x) = x^2.$$

№64. Найти f' на интервале $(0, \frac{3}{5})$, если

$$y = \min\left(1-x;\ 2x-1;\ \frac{x}{3}\right).$$

Здесь $\min(a, b, c)$ – наименьшее из чисел a, b, c.

Используя разные приёмы, решить задачи:

№65. Представьте, что вы шесть раз последовательно продифференцировали функцию

$$y = (3x + 5)^2(2x^2 + 3)(x + 7)^2$$

(всякий раз производная берётся от предыдущей производной). Чему равна последняя (шестая) производная $y^{(6)}(x)$? Решить задачу, не раскрывая скобок.

№66. Функция задана степенны́м рядом

$$y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Почленным дифференцированием ряда найти производную $y'(x)$ и показать, что функция y удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению $y' = y$. Что это за функция?

№67. Найти способ вычисления предела

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$$

сведением к вычислению производной некоторой функции в точке $x = 0$.

№68. [6, №844] Доказать формулу для производной дробно-линейной функции:

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}, \quad \text{где } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

есть определитель второго порядка.

1.7 Ответы и решения

1. $y' = \dfrac{1}{\sin x}$, где $x \in (2\pi n, \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

2. $y' = (\log_7(\cos^5 x))' = \dfrac{1}{\cos^5 x \cdot \ln 7} \cdot 5\cos^4 x \cdot (-\sin x)$ при $\cos x > 0$.

3. $y' = \dfrac{1}{1+\operatorname{th}^2 x} \cdot \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = \dfrac{1}{1+\frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}} \cdot \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x} = \dfrac{1}{\operatorname{ch} 2x}$.

4. Имеем

б) $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}} \cdot \left(-\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\right) \cdot \operatorname{sh} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2 x - 1}{\operatorname{ch}^2 x}} \cdot \operatorname{ch}^2 x} =$

$= \dfrac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}} \cdot \operatorname{ch}^2 x} = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x}}{|\operatorname{ch} x|} \cdot \operatorname{ch}^2 x} = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x} \cdot \operatorname{ch} x} = \dfrac{\operatorname{sh} x}{|\operatorname{sh} x| \cdot \operatorname{ch} x} =$

$$= \frac{\operatorname{sgn}(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch} x},\ x \neq 0.$$

5. $y' = -\dfrac{2}{\operatorname{sh}^3 x}$ $(x > 0)$.

6. $y' = 5\sin^4(\cos^2 x) \cdot 2\cos x(-\sin x)$, $x \in \mathbb{R}$.

7. $y' = -\sin 2x \cdot \cos(\cos 2x)$, $x \in \mathbb{R}$.

8. $y' = 10^{\operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x^2-8}} \cdot \ln 10 \cdot \dfrac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{x^2-8}\right)^2} \cdot \dfrac{2(x^2-8) - 2x(2x-1)}{(x^2-8)^2}$, $x \neq \pm\sqrt{8}$.

9. $y' = \dfrac{1}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot 2\ln(\ln^3 x) \cdot \dfrac{1}{\ln^3 x} \cdot 3\ln^2 x \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{6}{x \ln x \ln(\ln^3 x)}$, $x > 1, x \neq e$.

10. $y' = -\dfrac{1 + x + \frac{1}{x} + \ln\frac{1}{x}}{(1 + x\ln\frac{1}{x})(1 + x\ln(\frac{1}{x} + \ln\frac{1}{x}))}$.

11. $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^4 x}} \cdot 2\cos x \cdot (-\sin x) =$

$= \dfrac{2\sin x \cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}\sqrt{1+\cos^2 x}} = \dfrac{2\sin x \cos x}{|\sin x|\sqrt{1+\cos^2 x}} =$

$$= \frac{2\operatorname{sgn}(\sin x)\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}},\ x \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

12. $y' = \dfrac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1-x^2}}$ $(0 < |x| < 1)$.

13. $y' = -\dfrac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

14. При $x \neq -\dfrac{1}{3}; 0$ имеем $y' = \dfrac{1}{3}\left(x + \sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x+3x^2}}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot$

$$\cdot \left(1 + \frac{1}{3}\left(x + \sqrt[3]{x+3x^2}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(1 + \frac{1}{3}\left(x+3x^2\right)^{-\frac{2}{3}}(1+6x)\right)\right).$$

15. $y' = \sqrt{x^2+a^2}$.

16. $y' = \dfrac{x \cdot \arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$, где $|x| < 1$.

17. $y' = \dfrac{\cos^2 x}{\sin^3 x}$, где $x \in (2\pi n, \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

18. $y' = -\dfrac{\arccos x}{x^2}$, где $0 < |x| < 1$.

19. $y' = \dfrac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}$, где $|x| \neq 1$.

20. $y' = \dfrac{(\ln x)^{x-1}}{x^{\ln x+1}}(x - 2\ln^2 x + x\ln x \cdot \ln(\ln x))$, где $x > 1$.

21. Поскольку $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$, то

$$y' = -(1-x^2)^2(1-x^3)^3 + (1-x)2(1-x^2)(-2x)(1-x^3)^3 +$$
$$+(1-x)(1-x^2)^2 3(1-x^3)^2(-3x^2) =$$
$$= -(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)^2(1+6x+15x^2+14x^3),\ x \in \mathbb{R}.$$

22. $y' = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x \cdot \ln\dfrac{a}{b} \cdot \left(\dfrac{b}{x}\right)^a \cdot \left(\dfrac{x}{a}\right)^b + \left(\dfrac{a}{b}\right)^x \cdot b^a(-a)x^{-a-1} \cdot \left(\dfrac{x}{a}\right)^b +$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^x \cdot \left(\dfrac{b}{x}\right)^a \cdot a^{-b}bx^{b-1} = y\left(\ln\dfrac{a}{b} - \dfrac{a-b}{x}\right)$, $x > 0$.

23. Имеем

$$y'(x) = (x-1)(x-2)(x-3)...(x-2000) + x(x-2)(x-3)...(x-2000) +$$
$$x(x-1)(x-3)...(x-2000) + ... + x(x-1)(x-2)(x-3)...(x-1999).$$

Тогда $y'(0) = 2000!$, так как все слагаемые, кроме первого, содержат множитель x, обращающий соответствующее произведение в нуль при $x = 0$.

24. Обозначим $u = \cos^2 x$, тогда имеем $y = \ln(u + \sqrt{1+u^2})$. Продифференцируем y по u:

$$y'_u = \frac{1}{u+\sqrt{1+u^2}} \cdot \left(1 + \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Продифференцируем u по x: $u'_x = 2\cos x(-\sin x) = -\sin 2x$. Тогда $y'_x = y'_u \cdot u'_x = \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}} \cdot (-\sin 2x) = -\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}$, $x \in \mathbb{R}$.

25. Введём промежуточную переменную $u = \sqrt[4]{1+x^4}$, тогда $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} u + \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{u+1}{u-1}$ и, соответственно,

$y'_u = \dfrac{1}{2(1+u^2)} + \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{u-1}{u+1} \cdot \dfrac{(u+1)'(u-1) - (u+1)(u-1)'}{(u-1)^2} =$

$\dfrac{1}{2(1+u^2)} + \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{u-1}{u+1} \cdot \dfrac{-2}{(u-1)^2} = \dfrac{1}{2(1+u^2)} - \dfrac{1}{2(u^2-1)} = \dfrac{1}{1-u^4}$,

$u'_x = \dfrac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}$. Тогда $y'_x = y'_u \cdot u'_x = \dfrac{1}{1-u^4} \cdot \dfrac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}} =$

$\dfrac{1}{-x} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}} = -\dfrac{1}{x\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}$, $x \neq 0$.

26. Положим $t = n\ln x$, тогда $y = u(t(x))$. Поскольку $u' = (e^t(\cos t + \sin t))' = 2e^t \cos t$, то окончательно получим

$$y'(x) = u'(t) \cdot t'(x) = 2e^{n\ln x}\cos(n\ln x) \cdot \frac{n}{x},\ x > 0.$$

27. *Указание*: сделать замену $u = m \cdot \arcsin x \Rightarrow y' = \dfrac{2m}{\sqrt{1-x^2}} \cdot e^{m\cdot\arcsin x} \cdot \cos(m \cdot \arcsin x)$, где $|x| < 1$.

28. Найдём область определения функции:
$\log_2(\sin x) \geq 0 \ \Leftrightarrow\ \sin x = 1$, т. е. $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Поскольку функция определена в отдельных точках, то она не дифференцируема.

29. Известно, что арккосинус определён при условии $-1 \leq \operatorname{ch}(x^2) \leq 1$, но в то же время $\operatorname{ch}(x^2) \geq 1$. Отсюда получаем область определения функции: $\operatorname{ch}(x^2) = 1$, т. е. $x^2 = 0$. Функция нигде не дифференцируема, так как определена в единственной точке $x = 0$.

30. Аргумент функции строго больше единицы, поскольку первое слагаемое неотрицательно, а второе $2^{x^2+1} \geq 2$. Функция нигде не определена и, следовательно, не может быть дифференцируемой.

31. Упростив функцию, получим: $y = \dfrac{1}{\mathrm{th}^{100}(\ln 1)}$. Поскольку в знаменателе стоит нуль, то функция нигде не определена и, следовательно, нигде не дифференцируема.

32. Обратной функцией для $y = \mathrm{arctg}\, x$, $x \in \mathbb{R}$, является $x = \mathrm{tg}\, y$, $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, поэтому

$$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{(\mathrm{tg}\, y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \cos^2(\mathrm{arctg}\, x).$$

Упростим выражение $\cos^2(\mathrm{arctg}\, x)$. Так как $1 + \mathrm{tg}^2\, \alpha = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$, то $\cos^2 \alpha = \dfrac{1}{1 + \mathrm{tg}^2\, \alpha}$. Подставляя в последнее равенство $\alpha = \mathrm{arctg}\, x$, получим: $\cos^2(\mathrm{arctg}\, x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Итак, $(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

33. Обратной к логарифмической функции будет показательная $x = a^y$, поэтому

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{a^{\log_a x} \ln a} = \frac{1}{x \ln a},\ x > 0.$$

34. Чтобы найти обратную функцию, из равенства $y = \dfrac{2x+3}{5x-2}$ выразим переменную x через y: $x = \dfrac{2y+3}{5y-2}$ и поменяем местами x и y: $y = \dfrac{2x+3}{5x-2}$ – это функция, обратная к исходной дробно-линейной функции, и мы видим, что прямая и обратные функции в данном случае совпали. Продифференцируйте функцию самостоятельно.

35. а) Введём для удобства промежуточную переменную $t = e^x$, тогда $y = \frac{t-t^{-1}}{2} \Leftrightarrow t^2 - 2yt - 1 = 0 \Leftrightarrow t_{1,2} = y \pm \sqrt{y^2+1}$. В силу положительности t имеем $e^x = y + \sqrt{y^2+1}$, откуда логарифмированием получаем: $x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$. Итак, обратная функция (её называют ареасинус и обозначают $y = \mathrm{arsh} x$) имеет вид: $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, $x \in \mathbb{R}$. Осталось продифферен-

цировать: $y' = ... = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

б) Пусть $y = \operatorname{arsh} x$, тогда обратная к ней $x = \operatorname{sh} y$. По теореме о производной обратной функции имеем: $(\operatorname{arsh} x)' =$

$$= \frac{1}{(\operatorname{sh} y)'} = \frac{1}{\operatorname{ch} y} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{arsh} x)} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(\operatorname{arsh} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

36. Известно, что если при всех допустимых y выполнено тождество $f(f^{-1}(y)) \equiv y$, то функция $f^{-1}(y)$ является обратной к функции f. Поэтому $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}\,(4^y + 4^{-y})$ является обратной к f, и её производная $\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{2}\ln 4 \cdot (4^y - 4^{-y}) > 0$ при $y > 0$ (обе функции f и f^{-1} возрастают).

37. Пропотенцируем равенство $y = \ln(x + \ln(x + \ln(x + ...)))$ по основанию e: $e^y = x + \ln(x + \ln(x + ...)) \Leftrightarrow e^y = x + y$, откуда можно найти обратную функцию $x = e^y - y$. Тогда

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(e^y - y)'_y} = \frac{1}{e^y - 1} =$$

$$= \frac{1}{e^{\ln(x+\ln(x+\ln(x+...)))} - 1} = \frac{1}{x + \ln(x + \ln(x + ...)) - 1}.$$

38. Здесь производную удобнее найти через производную обратной функции. Найдём обратную функцию: $y^3 = x + y$, откуда $x = y^3 - y$. По теореме о производной обратной функции имеем:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(y^3 - y)'} = \frac{1}{3y^2 - 1} = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x + ...}}}\right)^2 - 1}.$$

39. $y = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \dfrac{1}{4}(1 - \cos 4x) =$

$= \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\cos 4x$. Продифференцировав, получим

$$y' = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x\right)' = -\sin 4x,\ x \in \mathbb{R}.$$

40. Положим $t = \sqrt{x-1}$, $t \in (3, 4)$, тогда $x = t^2 + 1$, и функция принимает вид $f(t) = \sqrt{(t-2)^2} + \sqrt{(t-3)^2} = |t-2| + |t-3|$.

На интервале $(3,4)$ оба модуля раскрываются положительно и получаем $f(t)=2t-5$, или, возвращаясь к прежней переменной, $y=2\sqrt{x-1}-5$. Дифференцируя эту функцию, находим $y'=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

41. Во-первых, уберём целое число из-под знака дробной части: $y=\ln\{x^2\}$. Во-вторых, вычислим дробную часть на заданном интервале. Так как $x^2\in(3,4)$, то $[x^2]=3$, а значит, $\{x^2\}=x^2-[x^2]=x^2-3$. Тогда функция принимает вид $y=\ln(x^2-3)$, поэтому $y'=\dfrac{1}{x^2-3}\cdot 2x$.

42. $\left(\dfrac{2\operatorname{th}x}{1+\operatorname{th}^2 x}\right)'=(\operatorname{th}2x)'=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 2x}\cdot(2x)'=\dfrac{2}{\operatorname{ch}^2 2x}$.

43. $(4\operatorname{sh}^3 x+3\operatorname{sh}x)'=(\operatorname{sh}3x)'=3\operatorname{ch}3x$.

44. Упрощая функцию (при $|x|\leqslant 1$), получаем:

$$y=\arcsin\sqrt{1-x^2}+\arccos\sqrt{1-x^2}=\frac{\pi}{2},$$

отсюда $y'\equiv 0$ при $|x|<1$.

45. Имеем $\sin(2\arccos x)=2\sin(\arccos x)\cdot\cos(\arccos x)=2\sqrt{1-x^2}\cdot x$, где $|x|<1$, поэтому $y'=(2x\sqrt{1-x^2})'=2\cdot\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

46. Имеем при $x\in(\pi,2\pi)$: $y=2\pi-x$, следовательно $y'=-1$.

47. 1) При $a<0$ имеем $y\equiv 1$, поэтому $y'\equiv 0$, $x\in\mathbb{R}$; 2) если $a=0$, то $y\equiv 1$ при $x\neq 0$, поэтому $y'\equiv 0$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$; 3) если $a>0$, то $y\equiv 1$ при $x\neq\pm\sqrt{a}$, поэтому $y'\equiv 0$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{\pm\sqrt{a}\}$. В последнем случае в точках $x=\pm\sqrt{a}$ производная не существует (функция не дифференцируема).

48. Заметим, что $f(x)=(x+6)^2-6$. Тогда $f(f(f(f(f(x)))))=(x+6)^{32}-6$, поэтому $y'=32(x+6)^{31}$.

49. Область определения функции: $x>0$. Прологарифмируем данную (положительную) функцию:

$$\ln y=\ln(x^{e^x}\cdot x^9)=e^x\ln x+9\ln x.$$

Дифференцируя теперь по x обе части равенства, получаем

$$\frac{y'}{y}=e^x\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}+\frac{9}{x},$$

откуда $y' = y\left(e^x \ln x + \dfrac{e^x+9}{x}\right) = \left(x^{e^x} \cdot x^9\right)\left(e^x \ln x + \dfrac{e^x+9}{x}\right)$.

50. Логарифмируя, находим $\ln y = a^x \ln x$. Дифференцируя затем по x, при $x > 0$ получаем

$$\frac{y'}{y} = (a^x \ln a)\ln x + a^x \cdot \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = x^{a^x} a^x \left(\ln a \ln x + \frac{1}{x}\right).$$

51. На области определения преобразуем функцию к виду:

$$y = \frac{1}{5}(\ln(1-x) - \ln(1+x))$$

и лишь затем продифференцируем:

$$y' = \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right) = \frac{2}{5(x^2-1)}.$$

52. Прологарифмируем, а затем возьмём производную:

$$\ln y = \frac{1}{2}\ln(x+2) + 6\ln(x-3) - 3\ln(x-1) - \frac{1}{4}\ln(3x-2) \Rightarrow$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2(x+2)} + \frac{6}{x-3} - \frac{3}{x-1} - \frac{3}{4(3x-2)} \text{ и так далее.}$$

53. Преобразуем функцию к виду $y = e^{\ln(1+4x)^{\operatorname{ctg} x}} = e^{\operatorname{ctg} x \ln(1+4x)}$, тогда при $x > -\frac{1}{4}$, $\sin x \neq 0$ имеем

$$y' = (e^{\operatorname{ctg} x \ln(1+4x)})' = e^{\operatorname{ctg} x \ln(1+4x)}(\operatorname{ctg} x \ln(1+4x))' =$$

$$= (1+4x)^{\operatorname{ctg} x}\left(-\frac{1}{\sin^2 x} \cdot \ln(1+4x) + \operatorname{ctg} x \cdot \frac{1}{1+4x} \cdot 4\right).$$

54. $y' = x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$, $x > 0$.

55. $\left(x^{x^a}\right)' = \left(e^{x^a \ln x}\right)' = x^{x^a}(x^a \ln x)' =$

$$= x^{x^a}\left(ax^{a-1}\ln x + x^a \cdot \frac{1}{x}\right) = x^{a-1}x^{x^a}(a\ln x + 1);$$

$$\left(x^{a^x}\right)' = \left(e^{a^x \ln x}\right)' = x^{a^x}\left(a^x \ln a \ln x + a^x \cdot \frac{1}{x}\right) =$$

$$= a^x x^{a^x}\left(\ln a \ln x + \frac{1}{x}\right);$$

$$\left(a^{x^x}\right)' = a^{x^x}\ln a \cdot (x^x)' = x^x a^{x^x}\ln a(1+\ln x).$$

56. $y' = \left(e^{\cos x \ln\sin x}\right)' = (\sin x)^{\cos x}(\cos x \ln\sin x)' =$
$= (\sin x)^{\cos x}\left(-\sin x \ln\sin x + \cos x \cdot \dfrac{\cos x}{\sin x}\right) = (\sin x)^{\cos x+1}$
$\cdot(\operatorname{ctg}^2 x - \ln\sin x)$, $\sin x > 0$. Аналогично дифференцируется второе слагаемое. Ответ: $y' = (\sin x)^{\cos x+1}\cdot(\operatorname{ctg}^2 x - \ln\sin x) - (\cos x)^{\sin x+1}\cdot(\operatorname{tg}^2 x - \ln\cos x)$, где $2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

57. $y = (x^2+1)^{\cos\frac{x}{2}} \Rightarrow \ln y = \cos\frac{x}{2}\ln(x^2+1) \Rightarrow (\ln y)' =$

$$= \left(\cos\frac{x}{2}\ln(x^2+1)\right)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\cdot\ln(x^2+1) + \cos\frac{x}{2}\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x$$

$$\Rightarrow y' = (x^2+1)^{\cos\frac{x}{2}}\left(-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\cdot\ln(x^2+1) + \frac{2x\cos\frac{x}{2}}{x^2+1}\right).$$

58. $y' = e^x(1 + e^{e^x}(1 + e^{e^{e^x}}))$, $x \in \mathbb{R}$.

59. Выразим y из этого равенства: $xy = \sin^3(\log_5 x) \Rightarrow y = \dfrac{1}{x}\sin^3(\log_5 x)$ $(x > 0)$ и, продифференцировав, получим

$$y' = -\frac{1}{x^2}\cdot\sin^3(\log_5 x) + \frac{1}{x}\cdot 3\sin^2(\log_5 x)\cdot\cos(\log_5 x)\cdot\frac{1}{x\cdot\ln 5}.$$

60. Заметим, что в силу известного тождества $x + y = \arcsin t + \arccos t = \frac{\pi}{2}$, откуда находим: $y = \frac{\pi}{2} - x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, следовательно, $y' = -1$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

61. По условию имеем: $5 - 2(2 - 3g(x)) = 13 - 24x$, откуда $g(x) = 2 - 4x \Rightarrow g'(x) = -4$.

62. Положив в данном уравнении $y = x$, приходим к тождеству $f(0) = f(x)+f(x)-2x^2$, откуда находим искомую функцию $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}f(0)$. Для определения $f(0)$ подставим в последнее равенство $x = 0$: $f(0) = \frac{1}{2}f(0)$, т. е. $f(0) = 0$. Итак, $f(x) = x^2$, следовательно $f'(x) = 2x$.

63. Найдём вначале $f(x)$. Положим в уравнении $y = 1 - x \Rightarrow x = 1-y$, и уравнение примет вид $2f(1-y)+f(y) = (1-y)^2$, $\forall y \in \mathbb{R}$. Переобозначив в последнем тождестве y на x, получим, что равенство $2f(1-x)+f(x) = (1-x)^2$ выполняется при всех

$x \in \mathbb{R}$. Тогда имеем систему двух уравнений, верных при всех $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2f(x) + f(1-x) = x^2, \\ 2f(1-x) + f(x) = (1-x)^2, \end{cases}$$

из которой находим $f(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 2x - 1) \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$.

64. Построив на указанном интервале графики всех трёх функций, видим, что ниже других расположен график функции $y = 2x - 1$. Следовательно, на данном интервале функция имеет вид $y = 2x - 1 \Rightarrow y' = 2$.

65. Если гипотетически раскрыть скобки, то получится многочлен шестой степени: $y = c_6x^6 + c_5x^5 + ... + c_1x + c_0$. При последнем, шестом, дифференцировании все слагаемые (в производной пятого порядка), кроме первого, обнулятся, и останется шестая производная первого слагаемого. Она равна $y^{(6)} = c_6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 6!\, c_6$. Таким образом, чтобы найти производную шестого порядка исходной функции, нам надо найти только коэффициент многочлена при старшей степени x^6, т. е. c_6. Находим его, перемножая коэффициенты при старших степенях x в каждом из трёх сомножителей. Находим $c_6 = 9 \cdot 2 \cdot 1 = 18$. Итак, $y^{(6)}(x) = 18 \cdot 6! = 12960$.

66. $y' = \left(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}\right)' = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{x^k}{k!}\right)' = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k \cdot \frac{x^{k-1}}{k!} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$ $= y$. Это экспоненциальная функция $y = e^x$.

67. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x+4} - 2$ и вычислим её производную в точке $x = 0$ по определению производной:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{x+4} - 2) - 0}{x}.$$

Очевидно, это искомый предел и он равен $f'(0)$. Тогда

$$f'(x) = (\sqrt{x+4} - 2)' = \left.\frac{1}{2\sqrt{x+4}}\right|_{x=0} = \frac{1}{4}.$$

68. $y' = \dfrac{(ax+b)'(cx+d) - (ax+b)(cx+d)'}{(cx+d)^2} =$

$$= \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2},\ cx + d \neq 0.$$

1.8 ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Гиперболические функции и формулы

Понятие гиперболических функций. Гипербóлические функции относятся к элементарным функциям и обладают свойствами, во многом аналогичными свойствам тригонометрических функций. Подобно тому как тригонометрические синус и косинус являются координатами точки на координатной окружности, гиперболические синус и косинус являются координатами точки на гиперболе и поэтому дают её параметрическое представление

$$x^2 - y^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = \operatorname{ch} t, \\ y = \operatorname{sh} t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Гиперболическим синусом действительного числа x называется функция $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ – нечётная и монотонно возрастающая на всей числовой прямой. Её график проходит через начало координат, причём касательная в этой точке имеет угол наклона $45°$.

Гиперболическим косинусом называется чётная положительная функция $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, определённая на всей числовой прямой. Её график имеет минимум, равный единице, при $x = 0$. Однородная верёвка или цепочка, свободно подвешенная за свои концы, приобретает форму графика функции $y = a \operatorname{ch} \dfrac{x}{a}$ $(a > 0)$, в связи с чем график гиперболического косинуса иногда называют цепной линией. Это обстоятельство используется при проектировании арок, поскольку форма арки в виде перевёрнутой цепной линии наиболее удачно распределяет нагрузку.

Гиперболический тангенс: $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$. Это нечётная функция, монотонно возрастающая на всей числовой прямой. Её график проходит через начало координат под углом $45°$ и имеет две горизонтальные асимптоты $y = -1$ (при $x \to -\infty$) и $y = 1$ (при $x \to +\infty$).

Гиперболический котангенс: $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$. Это нечётная

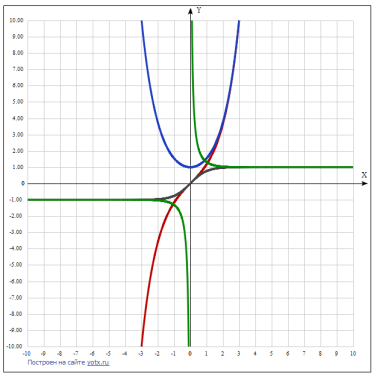

Рис. 1: Гиперболические функции

функция, определённая на всей числовой прямой, за исключением точки $x = 0$. График $\operatorname{cth} x$ состоит из двух ветвей и имеет три асимптоты: вертикальную, совпадающую с осью ординат, и две горизонтальные $y = \pm 1$.

Гиперболические соотношения $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$ **и другие гиперболические формулы.** Гиперболические формулы имеют свои тригонометрические аналоги и доказываются во многом аналогично. Приведённые ниже формулы могут быть также доказаны, опираясь непосредственно на определения гиперболических функций.

1. Основное гиперболическое тождество:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \quad (x \in \mathbb{R}),$$

а также $\operatorname{ch} x \pm \operatorname{sh} x = e^{\pm x}$.

2. Формулы $1 - \operatorname{th}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$, $\operatorname{cth}^2 x - 1 = \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ $(x \neq 0)$.

Доказательство состоит в приведении слагаемых в левых частях к общему знаменателю с последующим применением основного гиперболического тождества.

3. Формулы сложения:

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x,$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \operatorname{sh} x,$$
$$\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}\ ,\ \operatorname{cth}(x \pm y) = \frac{\operatorname{cth} x \operatorname{cth} y \pm 1}{\operatorname{cth} y \pm \operatorname{cth} x}.$$

Докажем, например, формулу сложения для котангенса:

$$\operatorname{cth}(x+y) = \frac{\operatorname{ch}(x+y)}{\operatorname{sh}(x+y)} = \frac{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y}.$$

Поделив числитель и знаменатель дроби на $\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \neq 0$, получим:

$$\frac{\operatorname{cth} x \operatorname{cth} y + 1}{\operatorname{cth} y + \operatorname{cth} x}.$$

4. Формулы двойного аргумента:

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x,$$
$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1 = 1 + 2 \operatorname{sh}^2 x,$$
$$\operatorname{th} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x},\ \ \operatorname{cth} 2x = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{cth} x}{2},$$
$$\operatorname{ch} 2x \pm \operatorname{sh} 2x = (\operatorname{sh} x \pm \operatorname{ch} x)^2.$$

Формулы тройного аргумента:

$$\operatorname{sh} 3x = 4 \operatorname{sh}^3 x + 3 \operatorname{sh} x,\ \ \operatorname{ch} 3x = 4 \operatorname{ch}^3 x - 3 \operatorname{ch} x.$$

5. Формулы универсальной подстановки:

$$\operatorname{sh} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 - \operatorname{th}^2 x},\ \ \operatorname{ch} 2x = \frac{1 + \operatorname{th}^2 x}{1 - \operatorname{th}^2 x}.$$

Доказательство. $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \dfrac{2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}$. Поделив затем числитель и знаменатель дроби на $\operatorname{ch}^2 x$, получим доказываемое.

6. Формулы понижения степени:

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2},\ \ \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}$$

(получаются из формул $\operatorname{ch} 2x = 1 + 2 \operatorname{sh}^2 x$, $\operatorname{ch} 2x = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1$).

7. Формулы: $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} 2x}{1 + \operatorname{ch} 2x} = \dfrac{\operatorname{ch} 2x - 1}{\operatorname{sh} 2x}$.

Продемонстрируем доказательство на примере одной из них:

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{2 \operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{sh} 2x}{1 + \operatorname{ch} 2x}.$$

8. Формулы суммы и разности синусов (косинусов):

$$\operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x \pm y}{2} \operatorname{ch} \frac{x \mp y}{2},$$

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x + y}{2} \operatorname{ch} \frac{x - y}{2},$$

$$\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x + y}{2} \operatorname{sh} \frac{x - y}{2}.$$

Докажем первую формулу. Сложив два тождества

$$\operatorname{sh}(\alpha + \beta) = \operatorname{sh}\alpha \operatorname{ch}\beta + \operatorname{ch}\alpha \operatorname{sh}\beta,$$
$$\operatorname{sh}(\alpha - \beta) = \operatorname{sh}\alpha \operatorname{ch}\beta - \operatorname{ch}\alpha \operatorname{sh}\beta,$$

получим: $\operatorname{sh}(\alpha + \beta) + \operatorname{sh}(\alpha - \beta) = 2 \operatorname{sh}\alpha \operatorname{ch}\beta$. Обозначим $x = \alpha + \beta$, $y = \alpha - \beta$, откуда $\alpha = \dfrac{x + y}{2}$, $\beta = \dfrac{x - y}{2}$. Осталось перейти в тождестве к x и y.

9. Формулы преобразования произведений синусов и косинусов в суммы (разности):

$$\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \frac{\operatorname{ch}(x + y) - \operatorname{ch}(x - y)}{2},$$

$$\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = \frac{\operatorname{sh}(x + y) + \operatorname{sh}(x - y)}{2},$$

$$\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \frac{\operatorname{ch}(x + y) + \operatorname{ch}(x - y)}{2}.$$

Выведем последнюю из них. Сложив две формулы

$$\operatorname{ch}(x - y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$
$$\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$

получим требуемое: $\operatorname{ch}(x - y) + \operatorname{ch}(x + y) = 2 \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y$.

10. Чётность (нечётность) гиперболических функций:

$$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x, \ \operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x,$$
$$\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x, \ \operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x.$$

11. При всех $x \in \mathbb{R}$ имеем неравенства:

$$0 \leq \operatorname{ch} x - 1 \leq |\operatorname{sh} x| < \operatorname{ch} x, \quad |x| \leq |\operatorname{sh} x|, \quad |\operatorname{th} x| < 1.$$

2 СЕМИНАР: Доказательство тождеств, неравенств и их применение как необходимый аппарат для решения задач математического анализа

«В математике следует помнить не формулы, а процессы мышления».

В. П. Ермаков (1845–1922),
российский математик и механик.

Домашнее задание: 69, 71, 73, 75, 76, 79, 80, 81, 84, 85, 88, 89, 95, 96, 100, 103, 104, 111, 112, 115, 117–123.

Приступая к изучению математики ещё в средней школе, любой из нас сталкивается с необходимостью преобразовать то или иное выражение к эквивалентному виду либо оценить его значение. Это могут быть числовые выражения или выражения, содержащие параметры и функции, их производные и интегралы, матрицы, векторы и проч. В первом случае понадобятся тождественные (эквивалентные, равносильные) преобразования, во втором – соответствующие неравенства. В высшей школе по мере дальнейшего получения математического образования, изучая с первого курса различные дисциплины, студенты неизбежно оказываются перед необходимостью решать задачи с использованием как тождеств, так и неравенств.

Цель занятия – ознакомиться с основными тождественными (выполняемыми сразу для всех допустимых значений переменных) алгебраическими и функциональными равенствами и неравенствами, научиться их доказывать и применять для решения различных задач, в том числе в математическом анализе. Специально для данного семинара в силу важности этой темы автором было разработано учебное пособие [21].

2.1 Известные тождества и неравенства

«Когда ты молоток, то все вокруг кажутся гвоздями».
Приписывают авторство *Джеффри Саксу (р. 1954)*, американскому экономисту.

Следует подчеркнуть, что существование равенств и неравенств обязано *свойству упорядоченности* множеств, объекты из которых подлежат сравнению. В частности, множество действительных чисел обладает этим свойством, т. е. между любыми двумя действительными числами всегда можно поставить один из знаков: больше, меньше или равно. А вот поставить знак неравенства между любыми двумя комплексными числами, матрицами или произвольными векторами уже нельзя. В таких ситуациях лишь можно ввести понятие частичной упорядоченности – по какому-либо из признаков.

Приведённые в данном пункте тождества пополняют следующий известный из средней школы список формул сокращённого умножения многочленов ($a, b \in \mathbb{R}$):

1. Разность квадратов: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.
2. Квадрат суммы (разности): $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.
3. Разность (сумма) кубов: $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.
4. Куб суммы (разности): $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.

2.1.1 Формула квадрата $(a_1+a_2+...+a_n)^2$ суммы n чисел

Для любых $a_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$, $n \geq 2$, справедлива формула для возведения в квадрат суммы n чисел:

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \underbrace{2a_1a_2 + 2a_1a_3 + ... + 2a_{n-1}a_n}_{\textit{удвоенные попарные произведения}}$$

Доказательство (методом математической индукции).

1) При $n = 2$ имеем $(a_1 + a_2)^2 = a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2$ – верно.

2) Предположим, что формула верна при некотором $n \in \mathbb{N}$, и докажем её справедливость при $n + 1$:

$$((a_1 + a_2 + ... + a_n) + a_{n+1})^2 =$$
$$= (a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 + 2(a_1 + a_2 + ... + a_n)a_{n+1} + a_{n+1}^2 =$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + ... + 2a_{n-1}a_n\right) + 2a_1a_{n+1} + ...$$
$$... + 2a_na_{n+1} + a_{n+1}^2 = \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + ... + 2a_na_{n+1},$$

В силу произвольности n тождество доказано. □

Пример 13. $(a + b - c - d)^2 =$
$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab - 2ac - 2ad - 2bc - 2bd + 2cd.$ □

2.1.2 Формула разложения на множители разности $a^n - b^n$ $(n \in \mathbb{N})$

Для любых $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 2)$ справедливо разложение на множители разности натуральных степеней двух чисел:[1]

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Эта формула обобщает известные формулы разности квадратов и разности кубов.[2]

Пример 14. Например,
$$x^7 - 1 = (x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1).$$ □

2.1.3 Формула разложения на множители суммы нечётных степеней $a^n + b^n$ $(n = 2k + 1)$

Для произвольных $a, b \in \mathbb{R}$, $n = 2k + 1$ $(k \in \mathbb{N})$, справедливо разложение на множители суммы нечётных степеней двух

[1] Доказывается непосредственным раскрытием скобок.

[2] Данное тождество в линейной алгебре *обобщается на случай матриц*. Пусть A и B – две квадратные коммутирующие матрицы (т. е. матрицы, для произведения которых справедливо перестановочное свойство $AB = BA$). Тогда справедливо тождество:

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + ... + AB^{n-2} + B^{n-1}).$$

Обобщение касается всех формул сокращённого умножения.

чисел[1]:

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - ... - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Пример 15. $x^7 + 1 = (x+1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$ $\square$.

2.1.4 Формула разложения на множители разности чётных степеней $a^n - b^n$ $(n = 2k)$

Для произвольных $a, b \in \mathbb{R}$, $n = 2k$ $(k \in \mathbb{N})$, справедливо тождество:[1]

$$a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - ... + ab^{n-2} - b^{n-1}).$$

Пример 16.

$x^8 - 1 = (x+1)(x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)$. $\square$

2.1.5 Бином Ньютона $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$

Для произвольных $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, справедливо тождество

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k =$$

$$= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^k a^{n-k} b^k + ...$$

$$+ C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + ...$$

$$+ \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} a^{n-k} b^k + ... + n a b^{n-1} + b^n.$$

Здесь C_n^k – биномиальные коэффициенты, которые находятся по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \text{ где } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i, \quad 0! = 1.$$

В частности, $C_n^0 = C_n^n = 1$, $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$,

[1] Доказывается непосредственным раскрытием скобок.

$$C_n^2 = C_n^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2!},\ C_n^k = C_n^{n-k} = \frac{n(n-1)\cdot ...\cdot (n-k+1)}{k!}.$$

Справедливы свойства биномиальных коэффициентов:

$C_n^k = C_n^{n-k}$, где $0 \le k \le n$ (*правило симметрии*),

$C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$, где $1 \le k \le n$ (*правило Паскаля*).

Формула бинома Ньютона для натуральных показателей была известна задолго до Исаака Ньютона, но им была указана (1676) возможность распространения этого разложения на случай дробного или отрицательного показателя (хотя строгое обоснование этого было дано лишь Н. Абелем, 1826). За это открытие, сделанное в возрасте 21 года, И. Ньютон получил степень бакалавра.

Бином Ньютона *в матричной форме*: если A и B – квадратные матрицы одного порядка, причём $AB = BA$, то имеет место формула

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^{n-k} B^k.$$

2.1.6 Полиномиальная теорема: обобщение бинома Ньютона $(a_1 + a_2 + ... + a_m)^n$

Для произвольных действительных a_i, $i = \overline{1,m}$, и натурального $n \ge 2$ справедливо тождество

$$(a_1 + a_2 + ... + a_m)^n = \sum_{k_1+k_2+...+k_m=n} C(k_1, k_2, ..., k_m) a_1^{k_1} \cdot ... \cdot a_m^{k_m},$$

где полиномиальные коэффициенты находятся по формуле

$$C(k_1, k_2, ..., k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdot ... \cdot k_m!}.$$

Доказывается методом математической индукции.

В частности, при $n = m = 3$ получаем формулу куба суммы трёх чисел:

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(a+c).$$

2.1.7 Неравенство о сумме взаимно обратных чисел $\left|a+\frac{1}{a}\right| \geqslant 2$ $(a \neq 0)$ и его обобщение

1. *Неравенство о сумме двух взаимно обратных положительных чисел.* Если $a > 0$, то $a + \dfrac{1}{a} \geqslant 2$, причём неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $a = 1$. (В частности, для любых $a, b > 0$ имеем $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geqslant 2$).

Действительно, умножая неравенство на a $(a^2 + 1 \geqslant 2a)$ и перенося все члены в одну сторону, получим условие неотрицательности полного квадрата: $(a-1)^2 \geqslant 0$.

2. *Неравенство о сумме двух взаимно обратных отрицательных чисел.* Если $a < 0$, то $a + \dfrac{1}{a} \leqslant -2$, причём неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $a = -1$.

Для доказательства достаточно применить неравенство для положительных чисел $(-a)$ и $\dfrac{1}{(-a)}$.

3. *Неравенство о сумме двух взаимно обратных чисел.* Если $a \neq 0$, то $\left|a + \dfrac{1}{a}\right| \geqslant 2$, причём равенство достигается только при $|a| = 1$.

4. *Неравенство о сумме n циклически обратных положительных чисел.* Для любых $x_k > 0$, $k = \overline{1,n}$, имеем

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + ... + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geqslant n.$$

2.1.8 Формула сложного радикала $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$

При допустимых значениях действительных a и b справедлива формула

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

Доказывается возведением в квадрат.

Пример 17. Представить $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ в виде суммы двух чисел по формуле сложного радикала.

Решение. Имеем

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2^2-3}}{2}}+\sqrt{\frac{2-\sqrt{2^2-3}}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}.\ \square$$

2.1.9 Неравенство треугольника $|x+y|\leqslant|x|+|y|$ и его обобщение

1. *Неравенство треугольника.* Для любых $x,y\in\mathbb{R}$

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|,\text{ причём }|x+y|=|x|+|y|\Leftrightarrow xy\geqslant 0.$$

Доказывается возведением в квадрат.

Следствие. Для любых $x,y,z\in\mathbb{R}$ верно

$$|x-y|=|x-z+z-y|\leqslant|x-z|+|z-y|.$$

2. (Обобщение неравенства треугольника: *неравенство многоугольника*). Для любых действительных чисел x_i, $i=\overline{1,n}$ ($n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$), модуль суммы не превышает суммы модулей:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}x_i\right|\leq\sum_{i=1}^{n}|x_i|.$$

Неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда все числа x_i имеют один знак (все неотрицательны или, наоборот, все неположительны).

Доказательство (математической индукцией). При $n=2$ имеем $|x_1+x_2|\leq|x_1|+|x_2|$ – верно. Пусть при некотором произвольном $n\geq 2$ справедливо неравенство $\left|\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right|\leq\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$. Докажем его справедливость при $n+1$. В самом деле,

$$\left|\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}x_i+x_{n+1}\right|\leq\left|\sum_{i=1}^{n}x_i\right|+|x_{n+1}|\leq\sum_{i=1}^{n}|x_i|+|x_{n+1}|=\sum_{i=1}^{n+1}|x_i|,$$

что и требовалось доказать. $\square$

2.1.10 Обратные тригонометрические функции. Некоторые тригонометрические неравенства $|\sin x| \leq |x|$, $|\arcsin x| \geqslant |x|$ и др. Тригонометрические и гиперболические подстановки

Напомним определения обратных тригонометрических функций из курса элементарной математики и их графики.

Арксинусом действительного числа $x \in [-1, 1]$ называется действительное число $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ такое, что $\sin \alpha = x$.

Арккосинусом действительного числа $x \in [-1, 1]$ называется действительное число $\alpha \in [0, \pi]$ такое, что $\cos \alpha = x$.

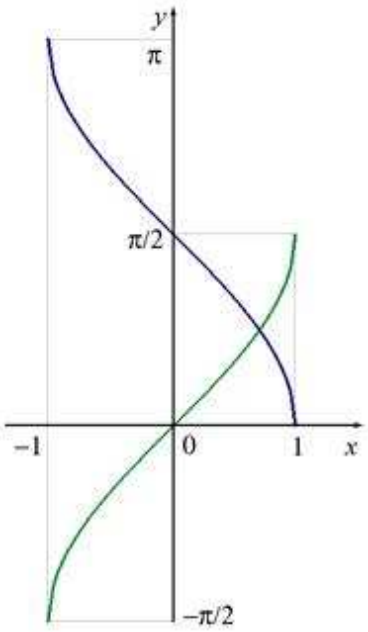

Рис. 2: Арксинус (возрастает) и арккосинус (убывает).

Арктангенсом действительного числа x называется действительное число $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ такое, что $\operatorname{tg} \alpha = x$.

Арккотангенсом действительного числа x называется действительное число $\alpha \in (0, \pi)$ такое, что $\operatorname{ctg} \alpha = x$.

Отсюда следуют определения обратных функций.

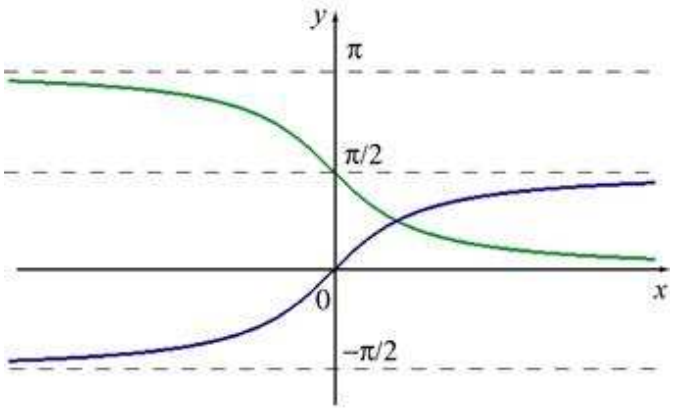

Рис. 3: Арктангенс (возрастает) и арккотангенс (убывает).

Функция $y = \arcsin x$, где $x \in [-1, 1]$, – это функция, обратная к функции $y = \sin x$, рассмотренной на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Функция $y = \arccos x$, где $x \in [-1, 1]$, – это функция, обратная к функции $y = \cos x$, рассмотренной на отрезке $[0, \pi]$.

Функция $y = \operatorname{arctg} x$, где $x \in \mathbb{R}$, – это функция, обратная к функции $y = \operatorname{tg} x$, рассмотренной на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Функция $y = \operatorname{arcctg} x$, где $x \in \mathbb{R}$, – это функция, обратная к функции $y = \operatorname{ctg} x$, рассмотренной на интервале $(0, \pi)$.

Приведём тождества, отражающие соотношения между взаимно обратными тригонометрическими функциями:

$$\sin(\arcsin x) = x \ \ (|x| \leqslant 1), \quad \arcsin(\sin x) = x \ \ (|x| \leqslant \frac{\pi}{2}),$$

$$\cos(\arccos x) = x \ \ (|x| \leqslant 1), \quad \arccos(\cos x) = x \ \ (x \in [0, \pi]),$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \ \ (x \in \mathbb{R}), \quad \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x \ \ (|x| < \frac{\pi}{2}),$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x \ \ (x \in \mathbb{R}), \quad \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x \ \ (x \in (0, \pi)).$$

Обобщения предыдущих тождеств имеют вид ($n \in \mathbb{Z}$):

$$\arcsin(\sin x) = x - 2\pi n \ \ \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right),$$

$$\arcsin(\sin x) = \pi - x + 2\pi n \ \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right);$$

$$\arccos(\cos x) = x - 2\pi n \ \ (2\pi n \leqslant x \leqslant \pi + 2\pi n),$$

$$\arccos(\cos x) = -x + 2\pi n \ \ (-\pi + 2\pi n \leqslant x \leqslant 2\pi n);$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x - \pi n \ \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n\right);$$

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x - \pi n \ \ (\pi n < x < \pi + \pi n).$$

Ниже выписаны тождества, позволяющие освобождаться от знака «минус» в аргументах обратных тригонометрических функций (две из них – арксинус и арктангенс – являются нечётными):

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x \ \ (|x| \leqslant 1),$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x \ \ (|x| \leqslant 1),$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x \ \ (x \in \mathbb{R}),$$

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x \ \ (x \in \mathbb{R}).$$

Ещё два известнейших соотношения:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \ \ (|x| \leqslant 1),$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} \ \ (x \in \mathbb{R}).$$

Тригонометрические функции обратных тригонометрических функций являются алгебраическими функциями и имеют вид:

$$\sin(\arcsin x) = \cos(\arccos x) = x \ \ (|x| \leqslant 1),$$

$$\cos(\arcsin x) = \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2} \ \ (|x| \leqslant 1),$$

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \ \ (|x| < 1),$$

$$\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} \ \ (0 < |x| \leqslant 1),$$

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \ \ (x \in \mathbb{R}),$$

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

Покажем идею доказательства последних из соотношений на примере некоторых из них.

1) Докажем, что $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ $(|x| \leqslant 1)$. Действительно, так как $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, то $|\cos\alpha| = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$. Возьмём в качестве $\alpha = \arcsin x$, тогда имеем $|\cos(\arcsin x)| = \sqrt{1-x^2}$, причём в силу того, что $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$, модуль над косинусом раскрывается положительно.

2) $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \dfrac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$.

3) Покажем, что $\cos(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $(x \in \mathbb{R})$. В самом деле, так как $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, то $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, отсюда $|\cos\alpha| = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$. Подставим в качестве $\alpha = \operatorname{arctg} x$, тогда имеем $|\cos(\operatorname{arctg} x)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Поскольку $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$, то модуль над косинусом раскрывается положительно.

4) $\sin(\operatorname{arctg} x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) \cdot \cos(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

5) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)} = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$. $\square$

Формулы сложения для арктангенса:

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy} \quad (xy > -1),$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} \quad (xy < 1).$$

При решении задач бывают полезны следующие тригонометрические неравенства:

$$|a\sin x + b\cos x| \leqslant \sqrt{a^2+b^2},$$

$$|\sin x| \leq |x| \ (x \in \mathbb{R}), \quad |\arcsin x| \geqslant |x|, \ x \in [-1,1],$$

$$|x| \le |\operatorname{tg} x|,\ x \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right), \quad |\operatorname{arctg} x| \le |x|,\ x \in \mathbb{R},$$
$$\left|\sin\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right| \le \sum_{k=1}^{n} \sin x_k, \text{ где } 0 \le x_k \le \pi,\ k = \overline{1,n},$$
$$|\sin nx| \le n|\sin x|, \text{ где } x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},$$

а также уже приведённые выше неравенства с гиперболическими функциями, верные при всех $x \in \mathbb{R}$:

$$0 \le \operatorname{ch} x - 1 \le |\operatorname{sh} x| < \operatorname{ch} x, \quad |x| \le |\operatorname{sh} x|, \quad |\operatorname{th} x| < 1.$$

В дальнейшем нам понадобится использовать при тождественном преобразовании радикалов тригонометрические и гиперболические подстановки. Напомним основные сведения об этих преобразованиях.

Тригонометрические подстановки. В задачах с иррациональностями бывает нужно выполнить такую замену переменной, чтобы иррациональное выражение в результате этой замены стало рациональным. Такие подстановки называют *рационализирующими*. Напомним наиболее известные тригонометрические подстановки.

1. Если в задаче имеется радикал вида $\sqrt{a^2 - x^2}$ $(a > 0)$, то это выражение рационализируется либо подстановкой $x = a\sin t$, где $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, либо подстановкой $x = a\cos t$, где $t \in [0, \pi]$. В первом случае каждому значению $x \in [-a, a]$ будет соответствовать единственное $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, и наоборот, каждому $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ будет отвечать единственное $x \in [-a, a]$ такое, что $x = a\sin t$. То есть данная подстановка реализует взаимно однозначное соответствие между множествами $[-a, a]$ и $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. При решении уравнений это, в частности, означает, что сколько решений в t имеет уравнение на отрезке $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, то ровно столько же решений в x будет иметь исходное уравнение на $[-a, a]$. Аналогичным свойством обладает вторая подстановка.

После любой из этих подстановок корень исчезает и получаем рациональное выражение. Например, для первой из них это выглядит так:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\sqrt{1 - \sin^2 t} = a|\cos t| = a\cos t, \text{ так как } \cos t \geqslant 0.$$

2. Если в задаче имеется радикал вида $\sqrt{a^2 + x^2}$ $(a > 0)$,

то это выражение рационализируется либо подстановкой $x = a\operatorname{tg} t$, где $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, либо подстановкой $x = a\operatorname{ctg} t$, где $t \in (0, \pi)$. В первом случае получаем:

$$\sqrt{a^2 + x^2} = a\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t} = a\sqrt{\tfrac{1}{\cos^2 t}} = \frac{a}{|\cos t|} = \frac{a}{\cos t}.$$

3. Если в задаче имеется радикал вида $\sqrt{x^2 - a^2}$ $(a > 0)$, то это выражение рационализируется либо подстановкой $x = \dfrac{a}{\sin t}$, где $t \in [-\pi/2, 0) \bigcup (0, \pi/2]$, либо подстановкой $x = \dfrac{a}{\cos t}$, где $t \in [0, \pi/2) \bigcup (\pi/2, \pi]$. В первом случае получаем:

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1} = a\sqrt{\operatorname{ctg}^2 t} = a|\operatorname{ctg} t|.$$

Гиперболические подстановки. Гиперболические формулы были рассмотрены выше в Приложении 1 к первому семинару. Приведём две известные гиперболические подстановки, позволяющие избавляться от квадратных корней.

1. Корни вида $\sqrt{a^2 + x^2}$ $(a > 0)$ преобразуются с помощью подстановки $x = a\operatorname{sh} t$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\sqrt{a^2 + x^2} = a\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} = a\sqrt{\operatorname{ch}^2 t} = a|\operatorname{ch} t| = a\operatorname{ch} t,$$

поскольку $\operatorname{ch} t > 0\ \forall t \in \mathbb{R}$.

2. Радикалы вида $\sqrt{x^2 - a^2}$ можно преобразовывать подстановкой $x = a\operatorname{ch} t$, $t \geq 0$ (если $x > 0$), или $x = -a\operatorname{ch} t$, $t \geq 0$ (если $x < 0$). Тогда

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} = a\sqrt{\operatorname{sh}^2 t} = a|\operatorname{sh} t|.$$

2.1.11 Среднее степенное $\left(\frac{x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p}{n}\right)^{1/p}$ и его свойства

Пусть даны n положительных действительных чисел x_i. Наиболее известны следующие их средние величины:

$$A_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \quad \text{(среднее арифметическое)},$$

$$G_n = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \quad \text{(среднее геометрическое)},$$

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}} \quad \text{(среднее гармоническое)},$$

$$S_n = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}} \quad \text{(среднее квадратичное)}.$$

При этом среднее геометрическое неотрицательных чисел x_i может интерпретироваться как число, которым можно заменить каждое из указанных чисел так, чтобы их произведение не изменилось. А среднее гармоническое n чисел является числом, обратным среднему арифметическому их обратных.

Обобщением указанных понятий средних величин является понятие *среднего степенного порядка* p ($p \in \mathbb{R}$). Определим среднее степенное для чисел $x_i > 0$, $i = \overline{1,n}$, при $p \neq 0$:

$$V_p(x_1, ..., x_n) = \left(\frac{x_1^p + x_2^p + ... + x_n^p}{n} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

При $p = 0$ по определению $V_0 = \lim\limits_{p \to 0} V_p$.

В частности, при $p = -1$ имеем $V_{-1} = H_n$ (среднее гармоническое), при $p = 0$ получим $V_0 = G_n$ (среднее геометрическое), при $p = 1$ имеем $V_1 = A_n$ (среднее арифметическое), а при $p = 2$ получим $V_2 = S_n$ (среднее квадратичное).

Величина V_p при любом p обладает свойствами:

1) $\min(x_1, x_2, ..., x_n) \leq V_p \leq \max(x_1, x_2, ..., x_n)$, где через $\min(\cdot)$ и $\max(\cdot)$ обозначены, соответственно, наименьшее и наибольшее из чисел $x_1, x_2, ..., x_n$.

2) Функция V_p является неубывающей по переменной p и, в частности, $H_n \leq G_n \leq A_n \leq S_n$,[1] причём все неравенства одновременно обращаются в равенства тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Пример 18. Доказать, что среднее геометрическое двух положительных чисел есть в то же время среднее геометрическое их среднего арифметического и среднего гармонического.

Доказательство. Действительно, $\sqrt{\frac{a+b}{2} \cdot \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}} = \sqrt{ab}$ – верно. □

[1] Одно из доказательств этого неравенства было опубликовано Коши в его учебнике по математическому анализу в 1821 году.

2.1.12 Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим $\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$,

Из свойства монотонности среднего степенного, в частности, следует, что для любых действительных чисел $x_i \geq 0$, $i = \overline{1,n}$, справедливо *неравенство Коши*[1]:

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n},$$

которое обращается в равенство тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Доказательство.[2] Докажем методом математической индукции вспомогательное утверждение.

Лемма. Если $x_1x_2...x_n = 1$, $n \geq 2$, $x_i > 0$, $i = \overline{1,n}$, то $x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n$.

Доказательство. 1) $n = 2 : x_1x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + \frac{1}{x_1} \geq 2$ – верно, причём неравенство обращается в равенство $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = 1$.

2) Предположим, что при некотором $n = k$ из равенства $x_1x_2...x_k = 1$ ($x_i > 0$) следует неравенство $x_1 + ... + x_k \geq k$, и докажем, что тогда это верно и при $n = k + 1$. Для этого рассмотрим любые положительные числа x_i, $i = \overline{1,k+1}$, удовлетворяющие условию $x_1...x_kx_{k+1} = 1$. Если все эти числа равны 1, то доказываемое утверждение очевидно. Пусть это не так, тогда среди этих чисел найдётся число < 1 и число > 1. Допустим, что $x_k > 1$, $x_{k+1} < 1$ (можно наоборот). Имеем равенство: $x_1...x_{k-1}(x_kx_{k+1}) = 1$. К этому произведению k чисел применимо предположение индукции, т. е. $x_1 + ... + x_{k-1} + x_kx_{k+1} \geq k$, или $x_1 + ... + x_{k-1} \geq k - x_kx_{k+1}$. Но тогда $(x_1 + ... + x_{k-1}) + x_k + x_{k+1} \geq (k - x_kx_{k+1}) + x_k + x_{k+1} = k+1+(x_k-1)(1-x_{k+1}) > k+1$, что и требовалось доказать. Равенство достигается при условии $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$.

---

[1] *Коши Огюстен Луи* (1789–1857) – французский математик, работавший, главным образом, в области математического анализа (дифференциальные уравнения, теория рядов) и теории функций комплексного переменного. Член Парижской Академии наук, почётный член Петербургской АН.

[2] В классическом труде Э. Беккенбаха и Р. Беллмана «Неравенства» (1965) рассмотрены 12 разных доказательств этого неравенства. За прошедшее с тех пор время количество доказательств сильно возросло.

С помощью леммы докажем теперь требуемое неравенство. Обозначим $C = \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}$, $y_i = \dfrac{x_i}{C}$, $i = \overline{1,n}$. Применим лемму для чисел y_i: так как $y_1 \cdot ... \cdot y_n = \dfrac{x_1 \cdot ... \cdot x_n}{C^n} = 1$, то по доказанному выше $y_1 + y_2 + ... + y_n \geq n \Leftrightarrow \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{C} \geq n \Leftrightarrow \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq C = \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}$.

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $y_i = 1$, $i = \overline{1,n}$, т. е. при $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$. □

Известно обобщение неравенства Коши в виде *взвешенного неравенства Коши*:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n \geq x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdot ... \cdot x_n^{p_n},$$

где $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$, $p_i > 0$, $x_i > 0$, $i = \overline{1,n}$, которое при $p_1 = ... = p_n = 1/n$ превращается в классическое неравенство Коши. Ещё бóльшее обощение (с ненормированными весами) этого неравенства имеет вид:

$$\left(\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n}\right)^{p_1 + p_2 + ... + p_n} \geq x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdot ... \cdot x_n^{p_n}.$$

2.1.13 Неравенство между средним геометрическим и средним гармоническим

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}.$$

Для любых положительных действительных чисел x_i, $i = \overline{1,n}$, $n \geq 2$, справедливо неравенство

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}.$$

Действительно, применим неравенство Коши к $\dfrac{1}{x_1}, ..., \dfrac{1}{x_n}$:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot ... \cdot \frac{1}{x_n}} \leq \frac{\frac{1}{x_1} + ... + \frac{1}{x_n}}{n},$$

откуда и получаем искомое неравенство. Равенство достигается только при условии $x_1 = x_2 = ... = x_n$. □

2.1.14 Неравенство Коши–Буняковского (Шварца) $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \le \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2$

1. *Элементарное неравенство К.-Б.* (в числовой форме, для конечных сумм). Для любых чисел $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$, справедливо неравенство[1]:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2,$$

которое обращается в равенство тогда и только тогда, когда числа x_i и y_i пропорциональны, т. е. существует такое число $t \neq 0$, что $x_i = t \cdot y_i$, $i = \overline{1,n}$, или же все x_i (или все y_i) одновременно равны нулю.

Доказательство. Если все числа x_i, $i = \overline{1,n}$, равны 0, то выполнение неравенства очевидно. Если же это не так, то перепишем неравенство $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i t + y_i)^2 \ge 0$, верное при всех $t \in \mathbb{R}$, в виде

$$t^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2t \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \ge 0.$$

Введём обозначения

$$A = \sum_{i=1}^{n} x_i^2,\ B = 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i,\ C = \sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

Неравенство $At^2 + Bt + C \ge 0$ ($A > 0$) выполняется сразу при всех $t \in \mathbb{R}$ только в случае, когда дискриминант квадратного трёхчлена неположителен: $D = B^2 - 4AC \le 0$, откуда и получаем требуемое неравенство.

Отметим, что знак равенства имеет место, если $x_i t + y_i = 0$, $i = \overline{1,n}$, т. е. существует такое число $\lambda \neq 0$, что $y_i = \lambda x_i$, $i = \overline{1,n}$, или когда все x_i, $i = \overline{1,n}$, или все y_i, $i = \overline{1,n}$, равны нулю. □

2. Неравенство К.-Б. *в векторной форме*:

$$(\vec{a}, \vec{b}) \le |\vec{a}||\vec{b}|,$$

где $\vec{a}, \vec{b}$ – произвольные векторы евклидового пространства $\mathbb{E}^n$, $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$ – их скалярное произведение. Равенство до-

[1] *Буняковский Виктор Яковлевич* (1804–1889) – русский математик, академик, член Петербургской АН.

стигается на сонаправленных векторах ($\varphi = 0$).

Пример 19. Пусть $a + b + c = 1$. Доказать неравенство:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}.$$

В самом деле, по неравенству Коши–Буняковского имеем:

$$1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b + 1 \cdot c \leq \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \square$$

2.1.15 Неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным $\frac{x_1+...+x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2+...+x_n^2}{n}}$

Для любых положительных действительных чисел x_i, $i = \overline{1,n}$, $n \geq 2$, справедливо неравенство

$$\frac{x_1 + ... + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + ... + x_n^2}{n}}.$$

Равенство достигается при условии $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Доказательство. Возведём неравенство в квадрат и затем умножим на n^2:

$$(x_1 + ... + x_n)^2 \leq (x_1^2 + ... + x_n^2) \cdot n,$$

$$\text{или} \quad (x_1 \cdot 1 + ... + x_n \cdot 1)^2 \leq (x_1^2 + ... + x_n^2) \cdot (1^2 + ... + 1^2),$$

а это неравенство Коши–Буняковского для чисел $x_1, ..., x_n$ и $1, ..., 1$.

2.1.16 Неравенства Бернулли $(1 + x)^n \geq 1 + nx$

1. Пусть x_i, $i = \overline{1,n}$, – действительные числа одного знака, большие (-1). Тогда справедливо неравенство[1]:

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \cdot ... \cdot (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + ... + x_n.$$

2. В частности, при $x_1 = x_2 = ... = x_n = x$ $(x > -1)$ получаем классическое неравенство Бернýлли ($n \in \mathbb{N}$):

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx,$$

[1] *Бернýлли Якоб* (1654–1705) – швейцарский ученый, профессор Базельского университета. Известен своими работами по дифференциальной геометрии, вариационному исчислению и математической физике.

которое обращается в равенство только при $x = 0$ или $n = 1$.

3. Обобщение на случай произвольного действительного показателя степени: $\forall x, r \in \mathbb{R}$, $x > -1$, $r \neq 0$, $r \neq 1$, справедливы неравенства Бернулли

$$(1+x)^r \leq 1 + rx, \quad \text{если } 0 < r < 1,$$

$$(1+x)^r \geq 1 + rx, \quad \text{если } r \notin [0,1],$$

причём неравенства обращаются в равенства $\Leftrightarrow x = 0$.

Доказательство. **1–2.** При $n = 1$ имеем $1 + x_1 \geq 1 + x_1$ – верно. Предположим, что утверждение верно для n и докажем его для $n+1$. Имеем (при $x_i > -1$):

$$(1+x_1)(1+x_2) \cdot ... \cdot (1+x_n)(1+x_{n+1}) \geq$$

$$\geq (1 + x_1 + x_2 + ... + x_n)(1 + x_{n+1}) = 1 + x_1 + x_2 + ... + x_n +$$

$$+x_{n+1} + x_{n+1}(x_1 + x_2 + ... + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + ... + x_{n+1},$$

так как $x_{n+1}(x_1 + x_2 + ... + x_n) \geq 0$. □

2.1.17 Неравенство Минковского о произведении сумм обратных чисел $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geq n^2$

Пусть x_i, $i = \overline{1,n}$, – положительные действительные числа. Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geq n^2.$$

Доказательство. Согласно неравенству Коши имеем:

$$\frac{x_1 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot ... \cdot x_n} \quad \text{и} \quad \frac{\frac{1}{x_1} + ... + \frac{1}{x_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot ... \cdot \frac{1}{x_n}}.$$

Умножая каждое из неравенств на n и перемножая их, получим искомое. □

2.1.18 Транснеравенства

Пусть $a_1, a_2, ..., a_n$ и $b_1, b_2, ..., b_n$ – произвольные наборы действительных чисел, а $c_1, c_2, ..., c_n$ – некоторая перестановка на-

бора $b_1, b_2, ..., b_n$. Зададимся вопросом, какая из сумм

$$S = a_1c_1 + a_2c_2 + ... + a_nc_n, \qquad (1)$$

полученных для различных перестановок $c_1, c_2, ..., c_n$, наибольшая, а какая – наименьшая?

Теорема. Среди всех сумм вида (1) наибольшей будет сумма, подсчитанная для одинаково упорядоченных последовательностей $\{a_k\}$ и $\{c_k\}$, а наименьшей будет та сумма, для которой последовательности обратно упорядочены.

В частности, если имеются два набора одинаково упорядоченных чисел $a_1 \geqslant a_2 \geqslant ... \geqslant a_n$, $b_1 \geqslant b_2 \geqslant ... \geqslant b_n$, то справедливы неравенства

$$a_1b_n + a_2b_{n-1} + ... + a_nb_1 \leqslant a_{i_1}b_{j_1} + a_{i_2}b_{j_2} + ... + a_{i_n}b_{j_n} \leqslant$$

$$\leqslant a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n,$$

где $i_1, ..., i_n$, $j_1, ..., j_n$ – произвольные перестановки индексов. Данные неравенства часто называют *транснеравенствами*.

Следствие. Если $b_1, b_2, ..., b_n$ – произвольная перестановка чисел $a_1, a_2, ..., a_n$, то

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \leqslant a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2.$$

Пример 20. Доказать неравенство $a^2b + b^2c + c^2a \leqslant a^3 + b^3 + c^3$.

Доказательство. Наборы a, b, c и a^2, b^2, c^2 – одинаково упорядочены. Следовательно, $a^2b + b^2c + c^2a \leqslant a^3 + b^3 + c^3$. $\square$

Пример 21. Доказать неравенство $3abc \leqslant a^3 + b^3 + c^3$.

Доказательство. Наборы a, b, c и bc, ac, ab – обратно упорядочены. Следовательно, $3abc = a \cdot bc + b \cdot ac + c \cdot ab \leqslant a^2b + b^2c + c^2a$. Объединив это неравенство с предыдущим, получим

$$3abc \leqslant a^2b + b^2c + c^2a \leqslant a^3 + b^3 + c^3.$$

Это в точности неравенство о средних арифметическом и геометрическом для чисел a^3, b^3, c^3. $\square$

Пример 22. Доказать неравенство $\dfrac{c-a}{a+b} + \dfrac{b-c}{c+a} + \dfrac{a-c}{b+c} \geqslant 0$.

Доказательство. Наборы a, b, c и $\dfrac{1}{b+c}, \dfrac{1}{c+a}, \dfrac{1}{a+b}$ – одинаково упорядочены. Следовательно,

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a},$$

или, что то же самое,

$$\frac{c-a}{a+b}+\frac{b-c}{c+a}+\frac{a-c}{b+c} \geqslant 0. \square$$

С помощью транснеравенств можно доказать многие неравенства, в том числе неравенство Коши–Буняковского, а также

$$\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_3}{a_2}+\frac{a_4}{a_3}+...+\frac{a_n}{a_{n-1}}+\frac{a_1}{a_n} \geqslant n.$$

2.1.19 Неравенства Чебышёва

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \geq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$

Если x_i и y_i, $i=\overline{1,n}$, – две неубывающие ($x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$, $y_1 \leq y_2 \leq ... \leq y_n$) или невозрастающие ($x_n \leq x_{n-1} \leq ... \leq x_1$, $y_n \leq y_{n-1} \leq ... \leq y_1$) последовательности действительных чисел, то справедливо неравенство

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \geq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right).$$

Если же наборы действительных чисел x_i и y_i, $i=\overline{1,n}$, обратно упорядочены, например, $0 < x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$, но $0 < y_n \leq y_{n-1} \leq ... \leq y_1$, то

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right),$$

причём в обоих случаях неравенство обращается в равенство лишь при условии $x_1 = x_2 = ... = x_n$ или $y_1 = y_2 = ... = y_n$ [21].

Доказательство. Пусть наборы чисел одинаково упорядочены:

$$x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n \quad \text{и} \quad y_1 \leq y_2 \leq ... \leq y_n.$$

Положим для краткости $A = \dfrac{1}{n}(x_1 + x_2 + ... + x_n)$. Пусть $x_1 \leqslant x_2 \leqslant ... \leqslant x_{m-1} \leqslant A \leqslant x_m \leqslant ... \leqslant x_n$. Заметим, что при всех k имеют

место неравенства

$$(x_k - A)(y_k - y_m) \geqslant 0.$$

Просуммируем их по всем k от 1 до n:

$$0 \leqslant (x_1y_1 + ... + x_ny_n) + nAy_m - A(y_1 + ... + y_n) - (x_1 + ... + x_n)y_m =$$

$$= (x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n) - A(y_1 + y_2 + ... + y_n),$$

это и есть неравенство Чебышёва. □

Пример 23. Доказать с помощью неравенства Чебышёва неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным:

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}} \geqslant \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}.$$

Доказательство. Упорядочив набор x_i по возрастанию, положим в первом неравенстве Чебышёва $y_i = x_i$, $i = \overline{1,n}$:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2,$$

откуда, извлекая квадратный корень, приходим к искомому неравенству. □

Пример 24. С помощью неравенства Чебышёва доказать неравенство Минковского

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}\right) \geqslant n^2$$

для любых положительных чисел $x_1, x_2, ..., x_n$.

Доказательство. Упорядочим набор x_i, тогда набор $1/x_i$ будет обратно упорядочен. Положим во втором неравенстве Чебышёва $y_i = 1/x_i$, $i = \overline{1,n}$:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{x_i} \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right).$$

В левой части находится единица. Умножая обе части неравенства на n^2, приходим к искомому неравенству. □

Неравенство Чебышёва позволяет также доказать неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим [21].

2.1.20 Неравенства Гёльдера

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q} \quad (p > 1)$$

Пусть $x_i \geqslant 0$, $y_i \geqslant 0$, $i = \overline{1,n}$, причём $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $(p, q \in \mathbb{R})$. Тогда справедливы неравенства Гёльдера[1] (доказательство см., например, в [21]):

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{при} \quad p > 1, \qquad (1)$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ge \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{при} \quad p < 1, p \neq 0. \qquad (2)$$

В случае $p < 0$ в (2) предполагается, что $x_i > 0$, $i = \overline{1,n}$. Знак равенства в (1) и (2) возможен только в случае пропорциональности векторов $\vec{x} = \{x_1^p, x_2^p, ..., x_n^p\}$, $\vec{y} = \{y_1^q, y_2^q, ..., y_n^q\}$.

2.2 Математическая индукция и другие методы доказательства тождеств и неравенств

> *«Пусть в очереди первой стоит женщина, и за каждой женщиной пусть стоит женщина. Тогда все в очереди – женщины!»*
> *(Шутливая формулировка принципа математической индукции)*

Для доказательства тождественных равенств и неравенств, в основном, применяются следующие методы:

– тождественные (эквивалентные) преобразования и сведение к очевидно верным равенствам и неравенствам;

[1] *Гёльдер Отто Людвиг* (1859–1937) – немецкий математик. Труды относятся к алгебре (особенно к теории групп), математическому анализу, теории потенциала, теории функций, теории рядов (расходящиеся ряды и ряды Фурье), а также теории чисел и основаниям математики. Найденное им неравенство (неравенство Гёльдера) для сумм и интегралов имеет важное значение в математическом и функциональном анализе.

– переход к следствию (например, при использовании свойства транзитивности в неравенствах);

– метод «от противного»;

– метод математической индукции.

Остановимся подробнее на последнем способе доказательства математических утверждений.

Метод математической индукции впервые, как это принято считать, был разработан французским философом, математиком и физиком Блезом Паскалем (Blaise Pascal, 1623–1662), а выражение «математическая индукция» впервые употребил английский математик А. Де Морган (Augustus De Morgan, 1806–1871). С тех пор этот метод широко применяется в математике для доказательства самых разнообразных тождеств, неравенств и других утверждений.

Рассмотрим суть метода. Пусть имеется утверждение Y_n, зависящее от натурального n, и необходимо доказать, что это утверждение выполняется для всех натуральных n, начиная с некоторого начального значения n_0. В основе метода лежит следующий принцип. Если: а) утверждение Y_n верно для $n = n_0$ и б) при каком бы то ни было натуральном $k \geq n_0$ из справедливости этого утверждения при $n = k$ вытекает справедливость его и для следующего натурального числа $n = k + 1$, то утверждение Y_n справедливо для любого натурального $n \geq n_0$.

Чтобы доказать методом математической индукции, что некоторое утверждение верно для любого натурального $n \geq n_0$, надо сделать следующее.

1. Убедиться в справедливости утверждения для начального значения $n = n_0$ (*базис индукции*).

2. Пусть $k \geq n_0$ – произвольное натуральное число. Предполагая справедливость данного утверждения при $n = k$ (*предположение индукции*), устанавливается справедливость утверждения для следующего за ним значения $n = k + 1$ (*индукционный шаг*).

3. *Вывод.* Так как утверждение верно при $n = n_0$, то в силу доказанного в предыдущем пункте оно будет верно при сле-

дующем значении, т. е. $n = n_0 + 1$. Из справедливости утверждения при $n = n_0 + 1$ вытекает по доказанному в пункте 2 выполнение утверждения при следующем значении $n = n_0 + 2$. Аналогично рассуждая, получаем, что если утверждение верно при $n = n_0 + 2$, то оно будет верно и при $n = n_0 + 3$ и так далее. Окончательно получаем, что доказываемое утверждение выполняется сразу для всех натуральных $n \geq n_0$.

Кратко сформулировать принцип математической индукции можно следующим образом. Пусть имеется последовательность утверждений $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$, и пусть первое утверждение Y_1 верно, и мы умеем доказать, что из верности утверждения Y_k следует верность Y_{k+1}. Тогда все утверждения в этой последовательности верны.

Существует принцип *полной математической индукции*. Вот его строгая формулировка. Пусть имеется последовательность утверждений $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ И пусть мы умеем доказать, что из верности утверждений $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_k$ следует верность Y_{k+1}. Тогда все утверждения в этой последовательности верны.

Иногда нужно доказать справедливость высказывания Y_k для целых k, удовлетворяющих условию $k_0 \leqslant k \leqslant k_1$. Так как между k_0 и k_1 находится конечное число целых k, то справедливость Y_k можно доказать простым перебором всех возможных вариантов. Однако легче, а иногда и необходимо (если, например, мы не знаем конкретных значений k_0 и k_1) доказать Y_k по индукции. В этом случае можно воспользоваться одним из двух вариантов конечной индукции.

Нисходящая индукция.

1. Проверяется базис индукции, т. е. справедливость утверждения Y_{k_1}.

2. Доказывается, что для произвольного $k_0 + 1 \leqslant k \leqslant k_1$ из справедливости Y_k следует справедливость Y_{k-1}.

Восходящая индукция.

1. Проверяется базис индукции, т. е. справедливость утверждения Y_{k_0}.

2. Доказывается, что для произвольного $k_0 \leqslant k \leqslant k_1 - 1$ из

справедливости Y_k следует справедливость Y_{k+1}.

Пример 25. Доказать, что при всех натуральных n выполняется тождество $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Указание. Решить задачу двумя способами: методом математической индукции и без его использования.

Доказательство. *1-й способ* (метод математической индукции).

1. Базис индукции: при $n = 1$ имеем

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} - \text{верно.}$$

2. Предположим, что тождество справедливо при $n = k$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

и докажем, что оно выполняется и для $n = k + 1$, т. е.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Начиная с левой части последнего тождества, придём к правой:

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2) + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} +$$

$$+(k+1)^2 = (k+1)\frac{2k^2+7k+6}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

3. Из пунктов 1 и 2 вытекает, что тождество справедливо при всех натуральных значениях n.

2-й способ. Имеем:

$2^3 = (1+1)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1^2 + 1^3$

$3^3 = (2+1)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1^2 + 1^3$

$4^3 = (3+1)^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot 1^2 + 1^3$

.....

$(n+1)^3 = n^3 + 3 \cdot n^2 \cdot 1 + 3 \cdot n \cdot 1^2 + 1^3.$

Сложим все эти равенства и после упрощения получим:

$$(n+1)^3 = 1 + 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + ... + n) + n.$$

С учётом $1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$, выразим из последнего равенства искомую сумму:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - (n+1) - \frac{3n(n+1)}{2}\right)$$

и т. д. $\square$

2.3 Задачи для самостоятельного решения

Используя бином Ньютона, решить задачи:

№69. Доказать, что при всех $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$ справедливо

$$C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k \quad (\textit{правило Паскáля}).$$

№70. Доказать, что сумма всех биномиальных коэффициентов в биноме Ньютона равна 2^n.

№71. Используя бином Ньютона, доказать правое неравенство в системе:

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Используя неравенство о сумме взаимно обратных чисел, решить задачи:

№72. Доказать, что при всех $a, b, c > 0$ верно неравенство

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c) \geqslant 6abc.$$

Указание: разделить неравенство на abc.

№73. (*Неравенство Несбитта*). Доказать, что если x_1, x_2, $x_3 > 0$, то справедливо неравенство

$$\frac{x_1}{x_2+x_3} + \frac{x_2}{x_3+x_1} + \frac{x_3}{x_1+x_2} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Указание: сделать замену $a = x_2+x_3$, $b = x_3+x_1$, $c = x_1+x_2$.

№74. Найти наименьшее значение функции при $x > 0$ и указать, при каких x оно достигается:

$$y = \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} + \sqrt{x+1} + \frac{1}{x} - 1.$$

№75. Найти наименьшее значение выражения:

$$f(x,y) = x^4 + y^4 + \frac{2}{x^2y^2} \quad (xy \neq 0).$$

№76. Найти наименьшее значение функции и указать, при каких x оно достигается:

$$y = \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2}{x^2 + x + 1}, \ x \in \mathbb{R}.$$

№77. При каких n система уравнений имеет положительные

решения

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ... + x_n = 3, \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n} = 3 \end{cases} ?$$

Задача на формулу сложного радикала:

№78. Разложить в сумму по формуле сложного радикала:

$$\sqrt{2x^2 - 2\sqrt{x^4 - y^4}}.$$

Доказать неравенство Коши́ (между средним арифметическим и средним геометрическим) и с его помощью решить задачи:

№79. Доказать, что для любых действительных чисел $x_i \geq 0$, $i = \overline{1,n}$, справедливо *неравенство Коши*:

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n},$$

которое обращается в равенство тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

№80. Доказать, что для любых положительных действительных чисел x_i, $i = \overline{1,n}$, $n \geq 2$, справедливо *неравенство между средним геометрическим и средним гармоническим*

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}.$$

№81. Доказать правое неравенство:

$$n^{\frac{n}{2}} \leq n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \ (n \in \mathbb{N},\ n \geq 2).$$

№82. Доказать, что при положительных a, b, c, сумма которых равна 1, верно неравенство

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} < 5.$$

№83. Доказать, что для любых положительных чисел a и b

$$2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab}.$$

№84. Доказать, что если $x_i > 0$ $(i = \overline{1,n})$ и $x_1 x_2 \cdot ... \cdot x_n = 1$, то $x_1 + x_2 + ... + x_n \geqslant n$.

№85. Пусть $x_i > 0$, $i = \overline{1,n}$, и $x_1 x_2 ... x_n = 1$. Доказать, что

$$(1 + x_1)(1 + x_2)...(1 + x_n) \geq 2^n.$$

№86. Доказать, что для любых $x_k > 0$, $k = 1, 2, ..., n$, справедливо неравенство:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + ... + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geqslant n.$$

№87. Не используя производной, найти наименьшее значение функции:

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{3x^6}, \ x \neq 0.$$

При каких x оно достигается?

Указание: представить функцию в виде $\frac{4}{3} \cdot \frac{x^2 + x^2 + x^2 + \frac{1}{x^6}}{4}$ и воспользоваться неравенством Коши для 4-х чисел.

№88. Найти наибольшее значение функции

$y = (1 - x)^5(1 + 2x)^2(1 + x)$ на отрезке $[-0,5; 1]$.

№89. Найти наименьшее значение выражения

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + \frac{2}{x^2 y^2}, \ xy \neq 0.$$

№90. Решить уравнение $2^{x^6} + 2^{x^2} = 2^{x^4+1}$.

№91. (Задача Дидоны для прямоугольников). Найти длины сторон прямоугольника с периметром P, имеющего наибольшую площадь.

№92. (Обратная задача Дидоны для прямоугольников). Найти длины сторон прямоугольника с площадью S, имеющего наименьший периметр.

№93. (Задача Дидоны для параллелепипедов). Площадь поверхности параллелепипеда равна S. Определить, при каких длинах сторон его объём будет максимальным.

№94. (Задача Дидоны для треугольников). Найти длины сторон треугольника с периметром $2p$, имеющего наибольшую площадь.

Используя неравенство Коши–Буняковского, решить:

№95. Доказать неравенство Коши–Буняковского

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

Когда неравенство обращается в равенство?

№96. Доказать двумя способами неравенство

$$(a+b+c+d)^2 \leq 4(a^2+b^2+c^2+d^2).$$

№97. Найти наибольшее значение функции:

$$y = a\sin x + b\cos x, \ \ x \in \mathbb{R}.$$

№98. Двукратным применением неравенства К.–Б. найти наибольшее значение функции:

$$y = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{3-x}.$$

№99. Решить уравнение $2\sqrt{x-1} + 5x = \sqrt{(x^2+4)(x+24)}$.

Используя неравенства Бернýлли, решить задачи:

№100. Доказать левое неравенство:

$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

№101. Найти наибольшее значение функции

$$f(x) = \sqrt{1-\frac{x}{3}} + \sqrt[6]{1+x}.$$

№102. Решить уравнение

$$\sqrt[5]{1+\sqrt{1-x^2}} + \sqrt[5]{1-\sqrt{1-x^2}} = 2.$$

Используя различные приёмы, решить задачи:

№103. [6, №10.а] Доказать неравенство:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} \quad (n \geqslant 2).$$

Методом математической индукции доказать тождества ($n \in \mathbb{N}$):

№104. $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$ (бином Ньютона).

№105. $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$;

№106. $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$;

№107. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

№108. $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + ... + n(n+1)(n+2) =$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4};$$

№109. $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + ... + \dfrac{1}{(n-1) \cdot n} = 1 - \dfrac{1}{n}$.

Замечание. Задачу также можно решить, преобразуя при $n \geqslant 2$ каждую дробь в разность дробей по формуле

$$\frac{1}{(n-1) \cdot n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

№110. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + ... + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$.

Методом математической индукции доказать неравенства ($n \in \mathbb{N}$):

№111. [6, №6] Пусть x_i, $i = \overline{1,n}$, – действительные числа одного знака, большие (-1). Доказать *неравенство Бернýлли*:

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \cdot ... \cdot (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + ... + x_n.$$

№112. [6, №7] Доказать, что если $x > -1$, то справедливо классическое (простейшее) *неравенство Бернýлли* ($n \in \mathbb{N}$):

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx,$$

которое обращается в равенство только при $x = 0$ (или $n = 1$).

№113. $2^n > 2n + 1$ $(n \geq 3)$;

№114. [6, №10.б] $n^{n+1} > (n+1)^n$ $(n \geq 3)$;

№115. $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$ $(n \geq 3)$;

№116. $|\sin nx| \leq n|\sin x|$, где $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$;

№117. [6, №10.в] $\left|\sin\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)\right| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \sin x_k$, где $0 \leq x_k \leq \pi$, $k = \overline{1,n}$.

№118. Доказать, что $\forall n \geq 2$ модуль суммы n действительных чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ меньше либо равен сумме их модулей:

$$|x_1 + x_2 + ... + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|.$$

№119. $\left(\frac{n}{3}\right)^n < n!$

№120. $n^{\frac{n}{2}} \leq n!$ $(n \geq 2)$;

№121. $2^n > n^3$ $(n \geqslant n_0$, предварительно определив $n_0)$;

№122. [6, №9.а] $2!\,4! \cdot ... \cdot (2n)! > ((n+1)!)^n$ $(n > 1)$;

№123. [6, №9.б] $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot ... \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$;

№124. $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + ... + \frac{1}{n+n} > \frac{13}{24}$ $(n \geqslant 2)$.

Методом математической индукции доказать утверждения о делимости нацело ($n \in \mathbb{N}$):

№125. Доказать, что $\forall\, n \in \mathbb{N}$ число $4^n + 15n - 1$ кратно 9.

№126. Доказать, что сумма кубов трёх последовательных натуральных чисел делится на 9.

№127. Доказать, что $3^{2n+2} + 8n - 9$ делится на 16.

Методом математической индукции решить задачу:

№128. Пусть числа x, y, a, b таковы, что $x + y = a + b$ и $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. Выразить через числа a и b сумму $x^n + y^n$, где $n \geq 3$ – натуральное.

«Идя от противного, можно прийти к очень противному».
Студенческая шутка.

Методом от противного решить задачу:

№129. Сто три яблока раздали четырнадцати студентам. Каждому досталось хотя бы одно яблоко. Показать, что по крайней мере два студента получили одинаковое количество яблок.

Доказать тригонометрические соотношения:

№130. Доказать тождества при условии $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$:

$$\sin(x+\pi n) = (-1)^n \sin x;$$
$$\cos(x+\pi n) = (-1)^n \cos x.$$

В частности, из последнего тождества при $x = 0$ получим:

$$\cos(\pi n) = (-1)^n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

№131. Доказать формулу «суммы синусов с аргументами, образующими арифметическую прогрессию с разностью x»:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}, \quad x \neq 2\pi l,\ l \in \mathbb{Z}.$$

№132. Доказать формулу «суммы косинусов с аргументами, образующими арифметическую прогрессию с разностью x»:

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}, \quad x \neq 2\pi l,\ l \in \mathbb{Z}.$$

№133. Доказать формулу «суммы синусов с чередующимися знаками и аргументами, образующими арифметическую прогрессию с разностью x» ($x \neq \pi + 2\pi l,\ l \in \mathbb{Z}$):

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sin kx = \frac{-\sin\frac{x}{2} + (-1)^n \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\cos\frac{x}{2}}.$$

№134. Доказать формулу «суммы косинусов с чередующимися знаками и аргументами, образующими арифметическую прогрессию с разностью x» ($x \neq \pi + 2\pi l,\ l \in \mathbb{Z}$):

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos kx = \frac{-\cos\frac{x}{2} + (-1)^n \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\cos\frac{x}{2}}.$$

№135. Доказать, что при всех $\alpha \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, справедливо

$$\cos\alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cos 8\alpha \cdot \ldots \cdot \cos(2^n\alpha) = \frac{(\frac{1}{2})^{n+1} \sin(2^{n+1}\alpha)}{\sin\alpha}.$$

№136. Доказать, что если $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma = 1.$$

№137. Доказать, что если $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta \cdot \operatorname{ctg}\gamma.$$

№138. Доказать, что если $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} x = \pi$, то

$$x + y + z = xyz.$$

2.4 Ответы и решения

69. Воспользуемся формулами для биномиальных коэффициентов:

$$C_n^{k-1} + C_n^k = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k}\right) = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k.$$

70. Для доказательства достаточно положить в биноме $a = b = 1$: $(1+1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k$.

71. Воспользуемся биномом Ньютона:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + C_n^1 \cdot \frac{1}{n} + C_n^2 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + C_n^3 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3 + ...$$

$$... + C_n^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} + C_n^n\left(\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + ... + \frac{n(n-1)(n-2)...2 \cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + ...$$

$$... + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n}\right) <$$

$$< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}.$$

Далее в силу неравенства $\dfrac{1}{k!} < \dfrac{1}{2^{k-1}}$ $(k \geq 3)$ получим

$$2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} <$$

$$< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} + ... = 2 + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3.$$

72. Разделим на abc и сгруппируем в пары:

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} \geqslant 6 \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) \geqslant 6.$$

73. Заменим: $a = x_2 + x_3$, $b = x_3 + x_1$, $c = x_1 + x_2$, откуда $x_1 = \dfrac{b+c-a}{2}$, $x_2 = \dfrac{a+c-b}{2}$, $x_3 = \dfrac{a+b-c}{2}$. Подставив в левую часть неравенства, получим

$$\frac{b+c-a}{2a} + \frac{a+c-b}{2b} + \frac{a+b-c}{2c} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right) + \left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\right) - \frac{3}{2} \geqslant \frac{3}{2}.$$

74. Преобразуем функцию к виду, удобному для определения наименьшего значения:

$$y = \left(\sqrt{\frac{1+x}{x^2}} + \frac{1}{x}\right) + (\sqrt{x+1} - 1) = \frac{\sqrt{x+1}+1}{x} +$$

$$+ \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{\sqrt{x+1}+1}{x} + \frac{x}{\sqrt{x+1}+1} \geq 2,$$

причём неравенство обращается в равенство $\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x+1}+1}{x} = 1$, т. е. при $x = 3$.

75. Выделяя полный квадрат, преобразуем функцию к виду

$$f(x,y) = (x^2-y^2)^2 + 2\left(\frac{1}{x^2y^2} + x^2y^2\right) \geqslant 4,$$

причём неравенство обращается в равенство $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y^2, \\ x^2y^2 = 1, \end{cases}$ например, при $x = y = 1$.

76. Делением числителя на знаменатель, получаем:

$$y = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x^2+x+1} \geq 2,$$

причём наименьшее значение достигается $\Leftrightarrow x^2+x+1 = 1$, т. е. при $x = -1; 0$.

77. Сложим уравнения системы:

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) + ... + \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) = 6.$$

Левая часть в полученном уравнении $\geq 2n \Leftrightarrow 6 \geq 2n$. Значит, при $n > 3$ система не имеет решений. При $n = 3$ находим

$x_1 = x_2 = x_3 = 1$, при $n = 2$ получаем $x_1 = x_2 = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, при $n = 1$, очевидно, решений нет.

78. Полагая $a = 2x^2$, $b = 4(x^4 - y^4)$, $\sqrt{a^2 - b} = 2y^2$, получим

$$\sqrt{2x^2 - 2\sqrt{x^4 - y^4}} = \sqrt{\frac{2x^2 + 2y^2}{2}} - \sqrt{\frac{2x^2 - 2y^2}{2}} = \\ = \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2 - y^2}.$$

79. Одно из доказательств приведено в тексте пособия.

80. Одно из доказательств рассмотрено в тексте пособия.

81. В самом деле, согласно неравенству Коши

$$\frac{1 + 2 + 3 + ... + n}{n} > \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n} \Leftrightarrow \frac{n+1}{2} > \sqrt[n]{n!}$$

82. $\sqrt{4a+1} = \sqrt{(4a+1) \cdot 1} \leqslant \dfrac{(4a+1)+1}{2} = 2a + 1$. Применяя это неравенство трижды и складывая, доказываем искомое неравенство.

83. Обозначим $x = \sqrt[10]{a}$, $y = \sqrt[15]{b}$. Тогда неравенство примет вид $2x^5 + 3y^5 \geq 5x^2y^3$. Для дальнейшего доказательства воспользуемся неравенством Коши при $n = 5$:

$$\frac{x^5 + x^5 + y^5 + y^5 + y^5}{5} \geq \sqrt[5]{x^5 \cdot x^5 \cdot y^5 \cdot y^5 \cdot y^5}.$$

84. Утверждение напрямую следует из неравенства Коши $\dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n} = 1$.

85. Для доказательства достаточно перемножить неравенства $1 + x_i \geq 2\sqrt{x_i}$, $i = \overline{1, n}$.

86. Неравенство немедленно следует из неравенства Коши:

$$\frac{\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + ... + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1}}{n} \geqslant \sqrt[n]{\frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_3} \cdot ... \cdot \frac{x_{n-1}}{x_n} \cdot \frac{x_n}{x_1}} = 1.$$

87. Представим функцию в виде $f(x) = \dfrac{1}{3}\left(3x^2 + \dfrac{1}{x^6}\right) =$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{x^2 + x^2 + x^2 + \frac{1}{x^6}}{4} \geq \frac{4}{3} \cdot \sqrt[4]{x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x^6}} = \frac{4}{3},$$

причём неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $x^2 = 1/x^6$, т. е. при $x = \pm 1$.

88. На данном отрезке числа $1 - x, 1 + 2x, 1 + x$ неотрицательны. По неравенству Коши для восьми чисел:

$$(1-x)^5(1+2x)^2(1+x) \le \left(\frac{5(1-x)+2(1+2x)+(1+x)}{8}\right)^8 = 1,$$

причём максимум достигается $\Leftrightarrow 1 - x = 1 + 2x = 1 + x \Leftrightarrow x = 0$.

89. Так как $\dfrac{a+b+c+d}{4} \ge \sqrt[4]{abcd}$ $(a, b, c, d \ge 0)$, то

$$x^4 + y^4 + \frac{1}{x^2y^2} + \frac{1}{x^2y^2} \ge 4 \cdot \sqrt[4]{x^4 \cdot y^4 \cdot \frac{1}{x^2y^2} \cdot \frac{1}{x^2y^2}} = 4,$$

причём $f(1, 1) = 4$.

90. Дважды воспользуемся неравенством Коши:

$$2^{x^6} + 2^{x^2} \geqslant 2\sqrt{2^{x^6} \cdot 2^{x^2}} = 2^{\frac{x^6+x^2}{2}+1} \geqslant 2^{\sqrt{x^6 \cdot x^2}+1} = 2^{x^4+1},$$

причём неравенство обращается в равенство $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2^{x^6} = 2^{x^2} \\ x^6 = x^2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{-1; 0; 1\}.$$

91. Обозначим длины сторон прямоугольника через x_1 и x_2, а его площадь – через S. Тогда задача примет вид: $S = x_1x_2 \to \max$ при ограничениях $2x_1 + 2x_2 = P$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$. Воспользуемся неравенством Коши при $n = 2$: $\dfrac{x_1 + x_2}{2} \ge \sqrt{x_1x_2}$. Поскольку $x_1 + x_2 = P/2$, то получаем: $\frac{P^2}{16} \ge x_1x_2 = S$, причём неравенство обращается в равенство при $x_1 = x_2 = P/4$. Таким образом, прямоугольником наибольшей площади, имеющим заданный периметр P, является квадрат, длина стороны которого равна $P/4$.

92. Используя обозначения из предыдущей задачи, имеем: $P = 2x_1 + 2x_2 \to \min$ при ограничениях $x_1x_2 = S$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$. По неравенству Коши $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \ge x_1x_2 = S$. Следовательно, $P = 2(x_1+x_2) \ge 4\sqrt{S}$, причём неравенство обращается в равенство при $x_1 = x_2 = \sqrt{S}$. Таким образом, прямоуголь-

ником наименьшего периметра, имеющим заданную площадь S, является квадрат со стороной $\sqrt{S}$.

93. Обозначим длины сторон параллелепипеда через x_1, x_2 и x_3, а его объём – через V. Тогда имеем задачу: $V = x_1x_2x_3 \to \max$ при ограничениях $2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = S$, $x_i \geq 0$, $i = \overline{1,3}$. Воспользуемся неравенством Коши при $n = 3$ для чисел x_1x_2, x_1x_3 и x_2x_3: $\dfrac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{3} \geq \sqrt[3]{(x_1x_2x_3)^2}$, причём неравенство обращается в равенство при $x_1x_2 = x_1x_3 = x_2x_3$, откуда находим: $x_1 = x_2 = x_3 = \sqrt{S/6}$. При этом максимальный объём $V = \sqrt{\left(\frac{S}{6}\right)^3}$. Таким образом, параллелепипед максимального объёма с площадью поверхности S имеет форму куба со стороной $\sqrt{S/6}$. Аналогично можно показать, что параллелепипед объёма V с минимальной площадью поверхности имеет форму куба.

94. Обозначим длины сторон треугольника через x_1, x_2 и x_3. Площадь треугольника S вычислим по формуле Герона. Имеем задачу: $S = \sqrt{p(p-x_1)(p-x_2)(p-x_3)} \to \max$ при ограничениях $x_1 + x_2 + x_3 = 2p$, $x_i \geq 0$, $i = \overline{1,3}$.

Воспользуемся неравенством Коши при $n = 3$ для чисел $p - x_1$, $p - x_2$, $p - x_3$: $\sqrt[3]{(p-x_1)(p-x_2)(p-x_3)} \leq \frac{p}{3}$, т. е. $(p-x_1)(p-x_2)(p-x_3) \leq \left(\frac{p}{3}\right)^3$. Отсюда получим $S = \sqrt{p(p-x_1)(p-x_2)(p-x_3)} \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$, причём неравенство обращается в равенство при $p = p - x_1 = p - x_2 = p - x_3$, т. е. $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{2p}{3}$, $\max S = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$. Таким образом, треугольником с периметром $2p$, имеющим наибольшую площадь, является равносторонний треугольник со стороной $\frac{2p}{3}$.

95. Доказательство приведено в тексте пособия.

96. *1 способ.* Воспользуемся неравенством $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, а затем неравенством $2ab \leq a^2 + b^2$:

$$((a+b)+(c+d))^2 \leq 2((a+b)^2+(c+d)^2) =$$
$$= 2(a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2cd) \leq 4(a^2+b^2+c^2+d^2).$$

2 способ. Согласно неравенству Коши-Буняковского

$$(a\cdot 1+b\cdot 1+c\cdot 1+d\cdot 1)^2 \leq (a^2+b^2+c^2+d^2)(1^2+1^2+1^2+1^2).$$

97. Имеем:

$$y = a\sin x + b\cos x \le \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x} = \sqrt{a^2+b^2},$$

причём наибольшее значение достигается, если $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, т. е. при $\operatorname{tg} x = a/b$.

98. Воспользуемся неравенством Коши-Буняковского

$$a_1a_2 + b_1b_2 \leqslant \sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2},$$

положив в нём $a_1 = \sqrt{x}$, $b_1 = \sqrt{3-x}$, $a_2 = 1$, $b_2 = 1$:

$$\sqrt{x}\cdot 1 + \sqrt{3-x}\cdot 1 \leqslant \sqrt{x+(3-x)}\cdot\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{6}.$$

Ещё раз применим это неравенство, положив теперь $a_1 = \sqrt[4]{x}$, $b_1 = \sqrt[4]{3-x}$, $a_2 = 1$, $b_2 = 1$:

$$\sqrt[4]{x}\cdot 1 + \sqrt[4]{3-x}\cdot 1 \leqslant \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{3-x}}\cdot\sqrt{1^2+1^2} \leqslant \sqrt[4]{6}\cdot\sqrt{2} = \sqrt[4]{24}.$$

99. Пусть $\vec{a} = \{2; x\}$, $\vec{b} = \{\sqrt{x-1}; 5\}$. Тогда

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\sqrt{x-1} + 5x \leqslant |\vec{a}||\vec{b}| = \sqrt{(x^2+4)(x+24)},$$

причём равенство возможно только при коллинеарности $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x-1}}{2} = \dfrac{5}{x} \Leftrightarrow x = 5 \in$ОДЗ.

100. Для доказательства воспользуемся неравенством Бернулли для $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1/n$:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ge 1 + n\cdot\frac{1}{n} = 2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

101. $\left(1-\dfrac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}} + (1+x)^{\frac{1}{6}} \le \left(1-\dfrac{x}{6}\right) + \left(1+\dfrac{x}{6}\right) = 2$, причём равенство достигается при $x = 0$.

102. Имеем оценки:

$$\sqrt[5]{1+\sqrt{1-x^2}} = (1+\sqrt{1-x^2})^{\frac{1}{5}} \le 1 + \tfrac{1}{5}\sqrt{1-x^2},$$
$$\sqrt[5]{1-\sqrt{1-x^2}} = (1-\sqrt{1-x^2})^{\frac{1}{5}} \le 1 - \tfrac{1}{5}\sqrt{1-x^2}.$$

Складывая полученные неравенства, получим

$$\sqrt[5]{1+\sqrt{1-x^2}} + \sqrt[5]{1-\sqrt{1-x^2}} \le 2,$$

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $\sqrt{1-x^2} = 0$, т. е. $x = \pm 1$.

103. При $n \geqslant 2$ имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}=$$

$= n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$, что и требовалось доказать.

104. Доказательство. 1) При $n = 1$ имеем $(a+b)^1 = C_1^0 a^1 b^0 + C_1^1 a^0 b^1 = a + b$ – верно.

2) Предположим, что тождество верно при некотором произвольном $n \in \mathbb{N}$, и докажем его справедливость при $n+1$:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^{k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} a^{n+1-k} b^k =$$

$$= C_n^0 a^{n+1-0} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) a^{n+1-k} b^k + C_n^n a^0 b^{n+1} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k,$$

т. к. $C_n^k + C_n^{k-1} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} + \dfrac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} =$

$$= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k,$$

что и требовалось доказать.

105. При $n = 1$ имеем: $1^3 = \dfrac{1^2 \cdot 2^2}{4}$ – верно. Предположим, что равенство верно при $n = k$, т. е. $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 = \dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$, и докажем его справедливость для $n = k+1$, т. е. $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 = \dfrac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$. Имеем:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 =$$

$$= \frac{(k+1)^2}{4}(k^2+4(k+1)) = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

106. При $n = 1$ имеем: $1^3 = 1^3$ – верно. Предположим, что равенство верно при $n = k$, т. е. $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 = (1+2+3+...+k)^2$, и докажем его справедливость для $n = k+1$:

$$((1+2+3+...+k)+(k+1))^2 = (1+2+3+...+k)^2 +$$

$$+2(k+1)(1+2+3+...+k)+(k+1)^2 =$$

$$= 1^3+2^3+3^3+...+k^3+2(k+1)\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)^2 =$$

$$= 1^3+2^3+3^3+...+k^3+(k+1)^3.$$

107. При $n = 1$ имеем: $1\cdot 2 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3}$ – верно. Предположим, что равенство верно при $n = k$, т. е.

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3},$$

и докажем его справедливость для $n = k+1$, т. е.
$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+k(k+1)+(k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$.
Имеем:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+k(k+1)+(k+1)(k+2) =$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)}{3}(k+3).$$

108. Убедившись, что при $n = 1$ тождество верно, предположим его справедливость при $n = k$ и докажем, что тогда тождество справедливо и при $n = k+1$, т. е.

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+...+(n+1)(n+2)(n+3) =$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}.$$

В самом деле,

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+...+(n+1)(n+2)(n+3) =$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}+(n+1)(n+2)(n+3) =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}.$$

109. Убедившись, что при $n = 1$ тождество верно, предположим его справедливость при $n = k$ и докажем, что тогда тождество справедливо и при $n = k + 1$, т. е.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

В самом деле,

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n \cdot (n+1)} =$$
$$= 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

110. Указание. При $n + 1$ имеем:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + ... + n \cdot 2^n + (n+1) \cdot 2^{n+1} = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2 +$$

$$+ (n+1) \cdot 2^{n+1} = n \cdot 2^{n+2} + 2, \text{ что и требовалось доказать.}$$

111. Доказательство приведено в тексте пособия.

112. Доказательство приведено в тексте пособия.

113. При $n = 3$ имеем $2^3 > 2 \cdot 3 + 1$ – верно. Предположим, что неравенство выполняется при некотором $n = k$ и докажем, что тогда оно будет верно и при $n = k + 1$. Действительно,

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2(2k + 1).$$

Поскольку $2(2k + 1) > 2k + 3 \Leftrightarrow 2k > 1$ – верно при $n \geq 3$, то из последних двух неравенств по свойству транзитивности следует доказываемое неравенство.

114. Возведём неравенство в степень $n(n + 1)$:

$$n^{n+1} > (n+1)^n.$$

При $n = 3$ имеем $3^4 = 81 > 64 = 4^3$ – верно. Пусть при некотором произвольном $n = k$ $(k \geq 3)$ выполняется неравенство $k^{k+1} > (k+1)^k$. Докажем, что и при $n = k+1$ оно также будет выполняться, т. е. $(k+1)^{k+2} > (k+2)^{k+1}$. Действительно,

$$(k+1)^{k+2} = k^{k+1} \cdot \frac{(k+1)^{k+2}}{k^{k+1}} > (k+1)^k \cdot \frac{(k+1)^{k+2}}{k^{k+1}} =$$

$$= \frac{(k+1)^{2(k+1)}}{k^{k+1}} = \left(\frac{(k+1)^2}{k}\right)^{k+1} = \left(\frac{k^2+2k+1}{k}\right)^{k+1} =$$

$$= \left(k+2+\frac{1}{k}\right)^{k+1} > (k+2)^{k+1}.$$

115. Возведением в степень $n(n+1)$ задача сводится к предыдущей.

116. 1) При $n=1$: $|\sin x| \le |\sin x|$ – верно.

2) Предположим, что $|\sin kx| \le k|\sin x|$ и докажем, что $|\sin(k+1)x| \le (k+1)|\sin x|$. В самом деле,

$$|\sin(k+1)x| = |\sin(kx+x)| = |\sin kx \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos kx| \le$$

$$\le |\sin kx||\cos x| + |\sin x||\cos kx| \le |\sin kx| + |\sin x| \le$$

$$\le k|\sin x| + |\sin x| = (k+1)|\sin x|.$$

117. При $n=1$ имеем $|\sin x_1| \le \sin x_1$ – верно. Предположим, что неравенство верно при некотором n, т. е.

$$\left|\sin\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right| \le \sum_{k=1}^{n} \sin x_k,$$

и докажем, что оно верно при $n+1$:

$$\left|\sin\left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right)\right| \le \sum_{k=1}^{n+1} \sin x_k.$$

В самом деле, $\left|\sin\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1}\right)\right| =$

$$= \left|\sin\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \cos x_{n+1} + \cos\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \sin x_{n+1}\right| \le$$

$$\le \left|\sin\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \cdot |\cos x_{n+1}| + \left|\cos\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \cdot |\sin x_{n+1}| \le$$

$$\le \left|\sin\sum_{k=1}^{n} x_k\right| + |\sin x_{n+1}| \le \sum_{k=1}^{n} \sin x_k + \sin x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \sin x_k.$$

118. При $n=2$ имеем $|x_1+x_2| \le |x_1| + |x_2|$ – верно (доказывается возведением в квадрат). Покажем, что из справедливости неравенства при некотором произвольном $n=k$ $(k \ge 2)$ следует его справедливость при $n=k+1$. В самом деле,

$$|(x_1+x_2+...+x_k)+x_{k+1}| \le |x_1+x_2+...+x_k| + |x_{k+1}| \le$$

$$\leq |x_1| + |x_2| + ... + |x_k| + |x_{k+1}|,$$

что и требовалось доказать.

119. При $n = 1$: $1/3 < 1$ – верно. Предположим, что неравенство верно при некотором $n = k$ и докажем его справедливость при $n = k + 1$. В самом деле,

$$(k+1)! = k!(k+1) > (k/3)^k(k+1).$$

Достаточно доказать, что $\left(\frac{k}{3}\right)^k (k+1) > \left(\frac{k+1}{3}\right)^{k+1} \Leftrightarrow 3 > \left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$, что выше было доказано.

120. При $n = 2$ имеем $2 \leq 2!$ – верно. Предположим, что неравенство верно при некотором $n = k$ и докажем его при $n = k + 1$:

$$(k+1)! = (k+1)k! \geq (k+1)k^{\frac{k}{2}}.$$

Достаточно доказать, что $(k+1)k^{\frac{k}{2}} \geq (k+1)^{\frac{k+1}{2}} \Leftrightarrow$

$k^{\frac{k}{2}} \geq (k+1)^{\frac{k-1}{2}} \Leftrightarrow k^k \geq (k+1)^{k-1} \Leftrightarrow k+1 \geq \left(\frac{k+1}{k}\right)^k =$

$= \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$. Но $2 < \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < 3$ при $k > 1$, следовательно, неравенство доказано.

121. При $n = 1$ имеем $2^1 > 1^3$ – верно, при $n = 2$ имеем $2^2 > 2^3$ – неверно, при $n = 3$ имеем $2^3 > 3^3$ – неверно,... Заметим, что при $n = 10$ получаем $2^{10} = 1024 > 10^3 = 1000$ – верно. Докажем методом математической индукции, что неравенство справедливо при всех $n \geq 10$. Предположим, что оно верно при некотором $n = k \geq 10$ и докажем его при $n = k + 1$. В самом деле,

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k^3.$$

Достаточно доказать, что

$$2k^3 > (k+1)^3 \Leftrightarrow 2 > \left(1 + \frac{1}{k}\right)^3 \Leftrightarrow 2^{\frac{k}{3}} > \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k,$$

что верно, поскольку при $n \geq 10$ $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < 3$, а $2^{\frac{k}{3}} > 3$.

122. При $n = 2$ имеем $2!4! > (3!)^2$ – верно. Предположим,

что неравенство верно при некотором n и докажем его справедливость при $n+1$. Имеем:

$$2!4! \cdot \ldots \cdot (2n)! \cdot (2(n+1))! > ((n+1)!)^n \cdot (2n+2)!$$

Достаточно доказать, что $((n+1)!)^n \cdot (2n+2)! > ((n+2)!)^{n+1}$. Действительно,

$$((n+1)!)^n \cdot (2n+2)! > ((n+1)!(n+2))^n (n+2)! \Leftrightarrow$$

$$(2n+2)! > (n+2)^n (n+2)! \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{(n+3)(n+4) \cdot \ldots \cdot (2n+2)}_{n} > (n+2)^n$$

откуда следует доказываемое неравенство.

123. При $n = 1$ имеем $\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ – верно. Предположим, что неравенство верно при некотором $n \geq 1$ и докажем его справедливость при $n+1$:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} <$$

$$< \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \cdot \frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \cdot \frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{\sqrt{(2n+1)^2}}{\sqrt{(2n+2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \cdot \frac{\sqrt{(2n+3)(2n+1)}}{\sqrt{(2n+2)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \cdot \sqrt{\frac{4n^2+8n+3}{4n^2+8n+4}} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}},$$

что и требовалось доказать.

124. При $n = 2$ имеем: $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} > \dfrac{13}{24}$ – верно. При $n = k$: $\dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1}{k+2} + \dfrac{1}{k+3} + \ldots + \dfrac{1}{k+k} > \dfrac{13}{24} \Leftrightarrow \dfrac{1}{k+2} + \dfrac{1}{k+3} + \ldots + \dfrac{1}{k+k} > \dfrac{13}{24} - \dfrac{1}{k+1}$. При $n = k+1$:

$$\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{k+k} + \frac{1}{k+(k+1)} + \frac{1}{(k+1)+(k+1)} >$$

$$> \left(\frac{13}{24} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} > \frac{13}{24}.$$

125. При $n = 1$ имеем $4^1 + 15 \cdot 1 - 1 = 18 \vdots 9$ – верно. Пусть при $n = k$ выполняется условие делимости $(4^k + 15k - 1) \vdots 9$. Докажем, что и при $n = k + 1$ оно также будет выполняться, т. е. $(4^{k+1} + 15(k + 1) - 1) \vdots 9$. Действительно,

$$4^{k+1} + 15(k + 1) - 1 = 4(4^k + 15k - 1) - 45k + 18.$$

Здесь первое слагаемое делится на 9 по предположению индукции, и оставшаяся группа $-45k + 18$, очевидно, также кратна 9. Поэтому число $4^{k+1} + 15(k + 1) - 1$ делится на 9, что и требовалось доказать.

126. Поскольку $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$ делится на 9, то для $n = 1$ утверждение верно. Предположим, что оно верно при $n = k$, т. е. $k^3 + (k + 1)^3 + (k + 2)^3 = 9m$ для некоторого натурального числа m. Рассмотрим для $n = k + 1$:

$$(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3 = (k+1)^3+(k+2)^3+k^3+9k^2+27k+27 =$$

$$= 9m + 9k^2 + 27k + 27 = 9(m + k^2 + 3k + 3),$$

что делится на 9.

127. При $n = 1$ имеем: $3^4 + 8 - 9 = 80$ делится на 16. Предположим, что при $n = k$ выражение $3^{2k+2} + 8k - 9 = 16m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Покажем, что $3^{2(k+1)+2} + 8(k + 1) - 9 = 3^{2k+4} + 8k - 1$ кратно 16. В самом деле,

$$3^{2k+4} + 8k - 1 = 9(3^{2k+2} + 8k - 9) - 64k + 80 = 16(9m - 4k + 5).$$

128. Заметим, что $xy = \dfrac{(x + y)^2 - (x^2 + y^2)}{2} = ab$. Выдвинем гипотезу, что при любом $n \geq 3$ выполняется равенство $x^n + y^n = a^n + b^n$, и докажем её индукцией по n.

1. При $n = 1$ и $n = 2$ утверждение верно по условию.

2. Пусть при некотором произвольном натуральном $n = k$ $(k \geq 2)$ $x^k + y^k = a^k + b^k$ и $x^{k-1} + y^{k-1} = a^{k-1} + b^{k-1}$. Покажем, что тогда $x^{k+1} + y^{k+1} = a^{k+1} + b^{k+1}$. В самом деле, $x^{k+1}+y^{k+1} = (x^k+y^k)(x+y)-xy(x^{k-1}+y^{k-1}) = (a^k+b^k)(a+b)-ab(a^{k-1} + b^{k-1}) = a^{k+1} + b^{k+1}$, что и требовалось доказать.

129. От противного, предположим, что не найдётся двух студентов, получивших одинаковое количество яблок. Тогда минимальное количество розданных яблок равно

$$1+2+3+...+13+14=\frac{14\cdot(1+14)}{2}=105>103.$$

Полученное противоречие доказывает искомое утверждение.

130. *Указание*: для доказательства достаточно рассмотреть случаи чётного и нечётного n.

131. Умножим и разделим сумму на $2\sin\frac{x}{2}$ $(\neq 0)$:

$$\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{x}{2}\sin kx=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(2\sin x\sin\frac{x}{2}+2\sin 2x\sin\frac{x}{2}+...+2\sin nx\sin\frac{x}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)+\left(\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{5x}{2}\right)+...\right.$$

$$\left.+\left(\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\right)=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

132. Умножим и разделим сумму на $2\sin\frac{x}{2}$ $(\neq 0)$:

$$\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\cdot\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{x}{2}\cos kx=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(2\sin\frac{x}{2}\cos x+2\sin\frac{x}{2}\cos 2x+...+2\sin\frac{x}{2}\cos nx\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\left(-\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{3x}{2}\right)+\left(-\sin\frac{3x}{2}+\sin\frac{5x}{2}\right)+...\right.$$

$$\left.+\left(-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x+\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\right)=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

133. Для доказательства умножим и разделим сумму на $2\cos\frac{x}{2}\neq 0$:

$$\frac{1}{2\cos\frac{x}{2}}\cdot\sum_{k=1}^{n}(-1)^k 2\sin kx\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2\cos\frac{x}{2}}\cdot$$

$$\cdot\left(-2\sin x\cos\frac{x}{2}+2\sin 2x\cos\frac{x}{2}-...+(-1)^n 2\sin nx\cos\frac{x}{2}\right)=$$

$$= \frac{1}{2\cos\frac{x}{2}}\left(-\left(\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{3x}{2}\right)+\left(\sin\frac{3x}{2}+\sin\frac{5x}{2}\right)-\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+(-1)^n\left(\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x+\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\right)=$$
$$= \frac{-\sin\frac{x}{2}+(-1)^n\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\cos\frac{x}{2}}.$$

134. Умножим и разделим сумму на $2\cos\frac{x}{2}$:

$$\frac{1}{2\cos\frac{x}{2}}\cdot\sum_{k=1}^{n}(-1)^k 2\cos\frac{x}{2}\cos kx = \frac{1}{2\cos\frac{x}{2}}\cdot$$
$$\cdot\left(-2\cos\frac{x}{2}\cos x+2\cos\frac{x}{2}\cos 2x-\ldots+(-1)^n 2\cos\frac{x}{2}\cos nx\right)=$$
$$= \frac{1}{2\cos\frac{x}{2}}\left(-\left(\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{3x}{2}\right)+\left(\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{5x}{2}\right)-\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+(-1)^n\left(\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x+\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\right)=$$
$$= \frac{-\cos\frac{x}{2}+(-1)^n\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\cos\frac{x}{2}}.$$

135. *Указание:* для доказательства достаточно умножить и разделить левую часть тождества на $2^{n+1}\sin\alpha$ и затем $(n+1)$ раз последовательно применить в числителе формулу синуса двойного угла.

136. Так как $\gamma=\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)$, то

$$\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}.$$

Умножая полученное равенство $\operatorname{tg}\gamma=\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}$ на $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta$, получаем доказываемое тождество.

137. Так как $\gamma=\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)$, то

$$\operatorname{ctg}\gamma=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{1}{\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)}=$$
$$=\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta-1}.$$

Умножая полученное равенство $\operatorname{ctg}\gamma=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta-1}$ на знаменатель дроби, получаем доказываемое тождество.

138. Имеем $\operatorname{arctg} z = \pi - (\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y)$, следовательно,

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} z) = \operatorname{tg}(\pi - (\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y)) \;\Leftrightarrow\; z = -\frac{x+y}{1-xy},$$

откуда следует доказываемое тождество.

3 СЕМИНАР: Действительные числа и их множества

Домашнее задание: 139, 140, 142, 144, 145, 149–157, 158(а), 160–162, 165, 170.

3.1 Теория действительных чисел

«Теория — это когда всё известно, но ничего не работает.
Практика — это когда всё работает, но никто не знает, почему.
Мы же объединяем теорию и практику: ничего не работает... и никто не знает, почему!»

Альберт Эйнштейн, один из наиболее значительных физиков XX века, создатель специальной и общей теории относительности, лауреат Нобелевской премии по физике (1921).

Если натуральные числа возникли в процессе счёта, рациональные – из потребности оперировать частями целого, то действительные числа[1] предназначены для измерения непрерывных величин.

3.1.1 Конструктивные подходы к определению действительного числа. Рациональные и иррациональные числа

Выделяют конструктивные и аксиоматические подходы к определению действительного числа. Основы современной теории действительных чисел были заложены во второй половине XIX века в работах К. Ве́йерштрасса, Р. Дедеки́нда, Г. Ка́нтора,

[1] Названия «вещественное число» и «действительное число» равнозначны. Исторически в Московской математической школе использовали термин действительное число, а в Ленинградской (Санкт–Петербургской) – вещественное число.

Э. Гéйне, Ш. Мерś. Так, в 1872 году были опубликованы одновременно три работы: теория фундаментальных последовательностей Кантора (действительное число рассматривается как предел последовательности рациональных чисел), теория Вейерштрасса (в современном варианте – теория бесконечных десятичных дробей, будет рассмотрена ниже) и теория сечений Дедекинда (действительные числа определяются с помощью так называемых «сечéний» в множестве рациональных чисел). Указанные теории построения множества действительных чисел относятся к конструктивным.

Действительные (рациональные, иррациональные) числа. Остановимся подробнее на теории действительных чисел, предложенной К. Вéйерштрассом[1] и получившей в настоящее время широкое распространение.

Действительным называется число, представимое в виде бесконечной десятичной дроби

$$\pm a_0, a_1 a_2 ... a_n ...$$

где символы «+» или «−» называются знаком числа, a_0 – целое неотрицательное число, $a_1, a_2, \dots a_n, \dots$ – последовательность десятичных знаков, т. е. элементов числового множества $\{0; 1; \dots; 9\}$. Число называется положительным, если ему приписан знак плюс $(+)$, и отрицательным, если знак минус $(-)$.

Если при этом дробь является периодической, то число называют *рациональным*, в противном случае – *иррациональным*. Рациональные числа всегда можно представить в виде (несократимой) обыкновенной дроби $\frac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. В частности, любое целое число является рациональным, и его можно представить в двух видах: как обыкновенную дробь и как периодическую десятичную. Например, $5 = \frac{5}{1} = 5,(0)$.

В курсе элементарной математики доказывается правило перевода рационального числа, записанного периодической дробью $x = a_0, a_1 a_2 ... a_k (a_{k+1} ... a_{k+m})$, к виду обыкновенной

[1] Карл Теодор Вильгельм *Вéйерштрасс* (1815–1897) — немецкий математик, «отец современного анализа».

дроби:

$$x = \frac{\overline{a_0 a_1 ... a_{k+m}} - \overline{a_0 a_1 ... a_k}}{\underbrace{99...9}_{m}\underbrace{00...0}_{k}},$$

Пример 26. Имеем:

$$5,01(307) = \frac{501307 - 501}{99900};\ \ 0,1(4600) = \frac{14600 - 1}{99990};\ \ 2,(19) = \frac{219 - 2}{99}.$$

Множество действительных чисел обозначают $\mathbb{R}$ (от лат. *realis* – действительный), множество рациональных чисел – $\mathbb{Q}$. Важнейшими подмножествами множества рациональных чисел являются множества натуральных $\mathbb{N}$ и целых $\mathbb{Z}$ чисел.

Наглядно понятие действительного числа можно представить себе при помощи числовой прямой. Если на прямой выбрать направление, начальную точку отсчёта и единицу длины для измерения отрезков, то каждому действительному числу можно поставить в соответствие определенную точку на этой прямой, и обратно, каждая точка будет представлять некоторое, и притом только одно, действительное число. Вследствие этого соответствия термин числовая прямая обычно употребляется в качестве синонима множества действительных чисел.

Сравнение действительных чисел. Множество действительных чисел *упорядочено*, т. е. между любыми двумя числами можно поставить один и только один из знаков $=$, $<$, $>$. Сравнение действительных чисел в форме бесконечных десятичных дробей производится поразрядно.[1] Например, пусть даны два неотрицательных числа $a = +a_0, a_1 a_2 ... a_n ...$ и $b = +b_0, b_1 b_2 ... b_n ....$ Если $a_0 < b_0$, то $a < b$; если $a_0 > b_0$, то $a > b$. В случае равенства $a_0 = b_0$ переходят к сравнению следующего разряда, и так далее. Если равенства $a_k = b_k$ выполняются

[1] Следует учитывать, что существуют две эквивалентные формы записи чисел с нулевым периодом: $a_0, a_1 a_2 \dots a_n(9) = a_0, a_1 a_2 \dots a_n + 10^{-n}$, например, $4,(9) = 5,(0)$. Поэтому, если запись одного из сравниваемых чисел, начиная с некоторого разряда, представляет собой периодическую десятичную дробь, у которой в периоде стоит 9, то её предварительно будем заменять на эквивалентную запись с нулем в периоде.

сразу для всех $k = 0, 1, 2, ...$, то числа a и b считаются равными. Если после конечного числа шагов встретится первый разряд n такой, что $a_n \neq b_n$, то $a \neq b$. Если при этом $a_n < b_n$, то $a < b$, а если $a_n > b_n$, то $a > b$.

Всякое отрицательное число по определению меньше нуля, а нуль меньше любого положительного числа. Для двух отрицательных чисел a и b меньшим считается то, у которого больше модуль.

Арифметические операции на множестве действительных чисел. *Суммой* двух действительных чисел a и b называется действительное число, обозначаемое $a + b$, такое, что для любых рациональных чисел α_1, α_2, β_1, β_2, удовлетворяющих неравенствам $\alpha_1 \leq a \leq \alpha_2$, $\beta_1 \leq b \leq \beta_2$, выполняются неравенства $\alpha_1 + \beta_1 \leq a + b \leq \alpha_2 + \beta_2$.

Произведением двух положительных действительных чисел a и b называется действительное число, обозначаемое $a \cdot b$, такое, что для любых неотрицательных рациональных чисел α_1, α_2, β_1, β_2, удовлетворяющих неравенствам $\alpha_1 \leq a \leq \alpha_2$, $\beta_1 \leq b \leq \beta_2$, выполняются неравенства $\alpha_1 \cdot \beta_1 \leq a \cdot b \leq \alpha_2 \cdot \beta_2$. Если хотя бы одно из чисел a и b равно нулю, то полагают $a \cdot b = 0$. Если числа a и b одного знака, то полагают $a \cdot b = |a| \cdot |b|$. Наконец, если числа a и b разных знаков, то по определению считают, что $a \cdot b = -|a| \cdot |b|$.

В курсе математического анализа доказываются теоремы существования и единственности суммы и произведения любых двух действительных чисел.

Разность и частное двух действительных чисел определяются через операции сложения и умножения. Так, *разностью* чисел a и b называется такое действительное число c, что $a = b + c$. Соответственно, *частным* двух действительных чисел a и b $(b \neq 0)$ называется такое действительное число c, что $a = bc$.

Приближение действительного числа рациональными числами. Рассмотрим важнейшие свойства действительных чисел. Очевидно, что на числовой прямой рациональные числа располагаются «вперемешку» с иррациональными, причем множество иррациональных чисел в известном смысле

«плотнée» множества рациональных. Возникает закономерный вопрос, насколько часто на числовой прямой попадаются рациональные и иррациональные числа, и можно ли одни числа приблизить другими. Ответ на этот вопрос дают три леммы, основанные, в основном, на аксиоме Архимеда.

Лемма 1. Для любого действительного числа a и любого положительного рационального расстояния ε найдётся пара рациональных чисел q_1, q_2, отстоящих друг от друга менее, чем на это расстояние и таких, что действительное число a лежит на отрезке между этими рациональными числами, т. е.

$$\forall a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+\ \exists q_1, q_2 \in \mathbb{Q}:\ (q_1 \le a \le q_2) \wedge (q_2 - q_1 < \varepsilon).$$

Эта лемма говорит о том, что любое действительное число можно с заданной точностью ε с двух сторон приблизить рациональными числами.

Лемма 2. Между любыми двумя различными действительными числами a и b содержится рациональное число q, т. е.

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a \ne b \quad \exists\, q \in \mathbb{Q}:\ a < q < b.$$

Очевидным следствием из этой леммы является тот факт, что между любыми двумя несовпадающими действительными числами содержится бесконечное множество рациональных. Кроме того, между любыми двумя различными рациональными числами содержится иррациональное.

Лемма 3. Приближение действительного числа рациональными, описанное в лемме 1, идентифицирует действительное число единственным образом:

$$(\forall a, b \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+\ \exists q_1, q_2 \in \mathbb{Q}:$$

$$(q_1 \le a \le q_2) \wedge (q_1 \le b \le q_2) \wedge (q_2 - q_1 < \varepsilon)) \Rightarrow a = b.$$

Все три леммы активно используются для доказательства различных теорем, связанных с операциями сложения и умножения действительных чисел.

3.1.2 Аксиоматические подходы к определению действительного числа

Наряду с конструктивными существуют аксиоматические подходы к определению действительных чисел как объектов, удовлетворяющих определённым наборам аксиом. Основоположником этого подхода считают *Д. Ги́льберта*.[1] Рассмотрим один из таких подходов.

Множество $\mathbb{R}$ называется *множеством действительных чисел*, а его элементы – действительными числами, если выполнен следующий комплекс условий, называемый аксиоматикой действительных чисел.

Аксиомы поля. На множестве $\mathbb{R}$ определена операция сложения, сопоставляющая каждой упорядоченной паре элементов a, b из $\mathbb{R}$ некоторый элемент c из того же множества $\mathbb{R}$, называемый суммой a и b. Также на множестве $\mathbb{R}$ определена операция умножения, ставящая в соответствие каждой упорядоченной паре элементов a, b из $\mathbb{R}$ некоторый элемент $a \cdot b$, называемый произведением a и b.

При этом имеют место следующие свойства.

I_1. Коммутативность сложения. Для любых $a, b \in \mathbb{R}$:

$$a + b = b + a.$$

I_2. Ассоциативность сложения. Для любых $a, b \in \mathbb{R}$:

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

I_3. Существование нуля. Существует элемент $0 \in \mathbb{R}$, называемый нулём, такой, что для любого $a \in \mathbb{R} : a + 0 = a$.

[1] Давид *Ги́льберт* (1862–1943) — немецкий математик-универсал, внёс значительный вклад в развитие многих областей математики. Член многих академий наук, в том числе Берлинской, Гёттингенской, Лондонского королевского общества, иностранный почётный член Академии наук СССР (1934). Лауреат премии имени Н.И. Лобачевского (1903). В 1910—1920-е годы (после смерти Анри Пуанкаре) был признанным мировым лидером математиков. Гильберт разработал широкий спектр фундаментальных идей во многих областях математики. Наиболее известны его первая полная аксиоматика евклидовой геометрии и теория гильбертовых пространств, одна из основ современного функционального анализа. Он внёс значительный вклад в теорию инвариантов, общую алгебру, математическую физику, интегральные уравнения и основания математики.

I_4. Существование противоположного элемента. Для любого $a \in \mathbb{R}$ существует элемент $(-a) \in \mathbb{R}$, называемый противоположным к a, такой, что $a + (-a) = 0$.

I_5. Коммутативность умножения. Для любых $a, b \in \mathbb{R}$:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

I_6. Ассоциативность умножения. Для любых $a, b \in \mathbb{R}$:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

I_7. Существование единицы. Существует элемент $1 \in \mathbb{R}$, называемый единицей, такой что для любого $a \in \mathbb{R} \Rightarrow a \cdot 1 = a$.

I_8. Существование обратного элемента. Для любого $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, существует элемент $a^{-1} \in \mathbb{R}$, обозначаемый также $\dfrac{1}{a}$ и называемый обратным к a, такой что $a \cdot a^{-1} = 1$.

I_9. Дистрибутивный закон умножения относительно сложения. Для любых $a, b, c \in \mathbb{R} : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

I_{10}. Нетривиальность поля. Единица и нуль – различные элементы $\mathbb{R} : 1 \neq 0$.

Аксиомы порядка. Между элементами $\mathbb{R}$ определено отношение $\leqslant$, т. е. для любой упорядоченной пары элементов a, b из $\mathbb{R}$ установлено, выполняется соотношение $a \leqslant b$ или нет. При этом имеют место следующие свойства.

II_1. Рефлексивность. Для любого $a \in \mathbb{R} : a \leqslant a$.

II_2. Антисимметричность. Для любых $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(a \leqslant b) \wedge (b \leqslant a) \Rightarrow (a = b).$$

II_3. Транзитивность. Для любых $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$(a \leqslant b) \wedge (b \leqslant c) \Rightarrow (a \leqslant c).$$

II_4. Линейная упорядоченность. Для любых $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(a \leqslant b) \vee (b \leqslant a).$$

II_5. Связь сложения и порядка. Для любых $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$(a \leqslant b) \Rightarrow (a + c \leqslant b + c).$$

II_6. Связь умножения и порядка. Для любых $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(0 \leqslant a) \wedge (0 \leqslant b) \Rightarrow (0 \leqslant a \cdot b).$$

Аксиома непрерывности.

III_1. Каковы бы ни были непустые множества $A \subset \mathbb{R}$ и $B \subset \mathbb{R}$ такие, что для любых двух элементов $a \in A$ и $b \in B$ выполняется неравенство $a \leqslant b$, существует такое число $\xi \in \mathbb{R}$, что для всех $a \in A$ и $b \in B$ имеет место соотношение $a \leqslant \xi \leqslant b$.

Этих аксиом достаточно, чтобы строго вывести все известные свойства вещественных чисел.

Существуют и другие способы аксиоматизации действительных чисел. В настоящее время наиболее распространённой аксиоматической теорией множеств является ZFC – *теория Цермéло–Фрéнкеля* с аксиомой выбора. Вопрос о непротиворечивости этой теории (а тем более – о существовании модели для неё) остается нерешённым.

К наиболее известным обобщениям действительных чисел относят: 1) комплексные числа (особенно плодотворны в алгебре и анализе); 2) интервальные числа (используются в теории приближенных вычислений и в теории вероятностей); в) нестандартный анализ, который добавляет к действительным числам бесконечно малые и бесконечно большие числа (разных порядков).

3.2 Теория множеств действительных чисел

Министр науки и высшего образования России Валерий Фалькóв объяснил, как можно решить проблему вузов, в которых количество студентов-стобалльников и победителей олимпиад больше, чем бюджетных мест для них. *«Мне кажется, требования к проведению олимпиад, дающих право на поступление в вузы без экзаменов, надо пересмотреть и серьёзно их ужесточить», – отметил В. Фальков 27.08.2021, – «потому что количество олимпиадников увеличивается».*

3.2.1 Общие определения. Равные множества. Подмножества

Понятие числового множества. Множество – одно из ключевых понятий математики, в частности, теории множеств и

логики. Не существует строгого определения множества. Можно сказать, что множество – это набор, совокупность, собрание каких-либо объектов, называемых его элементами, обладающих общим для всех характеристическим свойством. Понятие множества принимается за основное (аксиоматическое), т. е. не сводимое к другим понятиям.[1] Если элементами множества являются числа, то множество называют числовым. Ниже мы будем рассматривать, в основном, множества действительных чисел.

Множество может быть упорядоченным и неупорядоченным, конечным и бесконечным, счётным и несчётным, ограниченным и неограниченным, замкнутым и незамкнутым, выпуклым и невыпуклым и т. д.

Основное отношение между элементом a и содержащим его множеством A – это принадлежность элемента множеству, обозначается: $a \in A$ (a есть элемент множества A; a принадлежит A; A содержит a). Знак «$\in$» называется ква́нтором принадлежности. Если a не является элементом множества A, то пишут $a \notin A$ (a не входит в A; A не содержит a).[2]

Равные множества. Подмножества. Два множества A и B называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов, т. е. если каждый элемент множества A принадлежит B и, обратно, каждый элемент B принадлежит A. Тогда пишут $A = B$. Таким образом, множество однозначно определяется его элементами и не зависит от порядка записи этих элементов.

---

[1] «Под множеством мы понимаем объединение в одно целое определённых, вполне различимых объектов нашей интуиции или нашей мысли» (*Георг Ка́нтор*). «Множество есть совокупность различных элементов, мыслимая как единое целое» (*Бертран Ра́ссел*).

[2] Конечное множество можно задать перечислением всех его элементов, причём в этом случае употребляются фигурные скобки. Так $\{a, b, c\}$ обозначает множество трёх элементов. Аналогичная запись употребляется и в случае бесконечных множеств, причём невыписанные элементы заменяются многоточием. Так, множество натуральных чисел обозначается $\{1, 2, 3, ...\}$, а множество чётных чисел $\{2, 4, 6, ...\}$, причём под многоточием в первом случае подразумеваются все натуральные числа, а во втором – только чётные.

Пример 27. Множество из трёх элементов a, b, c допускает шесть видов записи:

$$\{a,b,c\} = \{a,c,b\} = \{b,a,c\} = \{b,c,a\} = \{c,a,b\} = \{c,b,a\}. \ \square$$

Из соображений формального удобства вводят пустое множество, не содержащее ни одного элемента. Его обозначают $\varnothing$.

Если каждый элемент множества A входит во множество B, то A называется *подмножеством* B. Пишут $A \subseteq B$, $B \supseteq A$ (A входит в B; A содержится в B; B содержит A). Очевидно, что если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то $A = B$. Пустое множество по определению считается подмножеством любого множества.

Если каждый элемент множества A входит в B, но множество B содержит хотя бы один элемент, не входящий в A, т. е. если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то A называется *собственным подмножеством* B. В этом случае пишут $A \subset B$, $B \supset A$.

3.2.2 Основные операции над множествами

1. Пересечение: $A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$ – это множество, содержащее в себе те и только те элементы, которые принадлежат одновременно всем исходным множествам.

2. Объединение: $A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$ – это множество, содержащее в себе те и только те элементы, которые принадлежат хотя бы одному из исходных множеств. Если множества A и B не пересекаются: $A \cap B = \varnothing$, то их объединение обозначают также $A + B = A \cup B$.

3. Разность (дополнение):
$$A \setminus B = A \cap \overline{B} = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

4. Симметрическая разность:
$$A \triangle B \equiv A \dot{-} B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \cap \overline{B} + \overline{A} \cap B = \\ = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}.$$

5. Декартово, или прямое, произведение:
$$A \times B = \{(a,\ b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Данные операции обладают определёнными свойствами. Чтобы не перегружать книгу, приведём лишь *свойства операции объединения.*

1) Операция объединения множеств коммутативна:

$$A \cup B = B \cup A.$$

2) Операция объединения множеств ассоциативна:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

3) Операция объединения множеств дистрибутивна относительно операции пересечения:

$$\left(\bigcap_k A_k \right) \cup B = \bigcap_k (A_k \cup B).$$

4) Пустое множество X является нейтральным элементом операции объединения множеств: $A \cup \varnothing = A$.

5) Операция объединения множеств идемпотентна[1]:

$$A \cup A = A.$$

Пример 28. а) Пусть $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, тогда $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; б) $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1] = \mathbb{R}$. □

Приоритет выполнения операций над множествами: сначала выполняются операции дополнения, затем пересечения, объединения и разности, которые имеют одинаковый приоритет. Последовательность выполнения операций может быть изменена скобками.

3.2.3 Виды множеств на числовой прямой

Назовём *ε-окрестностью точки* $x_0 \in \mathbb{R}$ интервал радиуса ε с центром в точке x_0 (ε-окрестность точки x_0 может быть задана неравенством $|x - x_0| < \varepsilon$). Тот же интервал с выколотым центром (т. е. без точки x_0), задаваемый неравенством $0 < |x - x_0| < \varepsilon$, будем называть *прокóлотой ε-окрестностью* точки x_0.

Точка x_0 называется *предельной точкой* (точкой сгущéния) множества $D \subseteq \mathbb{R}$, если в каждой её окрестности[2] содержится

[1] *Идемпотентная операция* в информатике – действие, многократное повторение которого не приводит к изменениям иным, нежели при однократном.

[2] Сколь угодно малой.

хотя бы одна точка множества D, отличная от x_0.[1]

Пример 29. Концы интервала – его предельные точки. Любая точка интервала также является для него предельной. Предельные точки отрезка – это точки самого отрезка и только они. □

Пример 30. Множество, состоящее из одной точки, не имеет предельных точек. Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ не имеет предельных точек. □

Из определения предельной точки следует, что в любой её окрестности всегда содержится бесконечное число точек множества D. При этом сама предельная точка может как принадлежать, так и не принадлежать множеству D.

Точка $x_0 \in D$, не являющаяся предельной точкой множества D, называется *изоли́рованной точкой* множества D. Иначе: изолированная точка – это такая точка множества, что пересечение некоторой её окрестности с множеством состоит только из этой точки. Или: если у неё есть окрестность, в которой нет других точек этого множества.

Пример 31. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ не имеет изолированных точек.

Пространство, каждая точка которого является изолированной, называется *дискре́тным*. Например, множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ дискретно, а множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ не является дискретным.

Назовём точку x_0 *внутренней точкой* множества D, если она принадлежит множеству D вместе с некоторой её окрестностью. Множество всех внутренних точек множества D называется *внутренностью* данного множества, или его *ядром*, и обозначается $int\, D$. Ядро множества D является открытым множеством.

Откры́тым называется множество, все точки которого есть внутренние точки. Для того чтобы множество D было откры-

[1] После изучения числовых последовательностей, мы сможем сформулирвать понятие предельной точки множества так: это такая точка x_0, к которой сходится некоторая последовательность точек множества, отличных от x_0.

тым, необходимо и достаточно, чтобы оно совпадало со множеством $int\, D$ своих внутренних точек.

Пример 32. Примеры окрытых множеств в $\mathbb{R}$: интервал (a, b); внешняя часть интервала $|x - x_0| > \varepsilon$; пустое множество.

Множество называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. Если множество не имеет ни одной предельной точки, то его тоже принято считать замкнутым.

Пример 33. Примером замкнутого множества действительных чисел служит сегмент $[a, b]$ (или $|x - x_0| \leqslant \varepsilon$).

Пример 34. Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел ни замкнуто, ни открыто.

Отметим, что только два множества – пустое множество $\varnothing$ и все пространство $\mathbb{R}$ – являются одновременно открытыми и замкнутыми множествами.[1] Можно доказать, что в остальных случаях, если множество D открыто, то оно не может быть замкнуто, и наоборот, если множество замкнуто, то не открыто.

Кроме своих предельных точек, замкнутое множество может также содержать изолированные точки. Если D – открытое множество, то его дополнение $\mathbb{R}\backslash D$ – замкнутое, и обратно. Можно сказать, что множество $D \subset \mathbb{R}$ называется *замкнутым* в $\mathbb{R}$, если $\mathbb{R}\backslash D$ является множеством, открытым в $\mathbb{R}$.

Точка x называется *граничной точкой* множества D, если в любой её окрестности есть как точки, принадлежащие множеству, так и точки, ему не принадлежащие. Множество всех граничных точек данного множества образуют его *границу* и обозначается ∂D. Граница множества всегда есть замкнутое множество. Граничные точки D могут как принадлежать, так и не принадлежать множеству D.

Внешние точки – это те, которые не являются ни внутренними, ни граничными. А именно, *внешней* точкой множества D называется такая точка $x \notin D$, что существует окрестность этой точки, не имеющая пересечений со множеством D. Мно-

[1] Говоря о множестве $\mathbb{R}$, здесь считаем, что оно включает свои предельные точки $\pm\infty$. То есть, строго говоря, рассматривается расширенное множество действительных чисел $\overline{\mathbb{R}}$.

жество всех внешних точек множества D обозначается $ext\, D$. Для любого множества D множества $int\, D$ и $ext\, D$ открытые.

Используя понятие граничной точки, можно определить замкнутое множество как множество, содержащее все свои граничные точки. Присоединение ко множеству D его границы ∂D называется операцией *замыкания* множества.

Пример 35. Замыкание интервала (a, b) есть отрезок $[a, b]$, полученный добавлением к интервалу его концов. Замыкание отрезка – он сам. Замыкание конечного множества – оно само.

Множество, полученное в результате замыкания множества D, обозначается $\overline{D}$. Замыкание любого множества замкнуто. Для того чтобы множество было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы оно совпадало со своим замыканием.

Пример 36. Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ является граничной точкой множества $\mathbb{R}\backslash\{x_0\}$, которое не имеет внешних точек.

Отметим, что замкнутость не является альтернативой к открытости: существуют множества, которые не являются ни открытыми, ни замкнутыми, например, полуинтервал $[a, b)$.

Для любого множества D пространства $\mathbb{R}$ верно:

1. $int\, D \cup ext\, D \cup \partial D = \mathbb{R}$.

2. $int\, D \cap ext\, D = int\, D \cap \partial D = ext\, D \cap \partial D = \varnothing$.

3. $D \cup \partial D = int\, D \cup \partial D = \overline{D}$.

Диаметром множества $D \subset \mathbb{R}$ называется величина $d = \sup\limits_{x,y \in D} |x - y|$, где $|x - y|$ – расстояние между точками x и y. Множество $D \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным*, если его диаметр конечен. С другой стороны, множество $D \subset \mathbb{R}$ можно назвать *ограниченным*, если все его точки находятся внутри некоторого конечного интервала.

Множество $K \subset \mathbb{R}$ назовём *компактом* (компактным), если K замкнуто и ограничено в $\mathbb{R}$.

Пример 37. Отрезок $[a, b] \in \mathbb{R}$ является компактом в $\mathbb{R}$. $\square$

Выпуклое множество – это множество, которое наряду с любыми двумя его точками a и b содержит также весь отрезок,

с концами в этих точках.

Пример 38. Выпуклые множества: отрезок, прямая, полупрямая. Любое выпуклое открытое множество на прямой является интервалом. □

Выпуклой оболочкой множества D называется наименьшее выпуклое множество, содержащее D. Выпуклая оболочка множества D обычно обозначается $\operatorname{Conv} D$.

Пример 39. Пусть $D = (a, b) \cup (c, d)$, где $a < b < c < d$. Выпуклой оболочкой для множества D является интервал (a, d). □

3.2.4 Мощность множества. Счётные и несчётные множества. Теорема Кантора

Мощность множества – это обобщение понятия количества элементов множества, которое имеет смысл для всех множеств, включая бесконечные. Следуя Ка́нтору, мощность множества называется кардинальным числом. Мощность множества A обозначим через $|A|$, также встречается обозначение $card(A)$.

Если между двумя множествами можно установить взаимно однозначное соответствие (биекцию), то такие множества называются *равномощными*. С точки зрения теории множеств, равномощные множества неразличимы. Взаимно однозначное отображение конечного множества в себя называется перестановкой (элементов этого множества).

Пример 40. Докажем, например, что множество чётных целых чисел $\mathbb{E}$ имеет такую же мощность, что и множество целых чисел $\mathbb{Z}$. Определим функцию $f : \mathbb{E} \to \mathbb{Z}$ так: $f(x) = \dfrac{x}{2}$. Эта функция устанавливает взаимно однозначное отображение между множествами $\mathbb{E}$ и $\mathbb{Z}$, поэтому $|\mathbb{E}| = |\mathbb{Z}|$. □

Для любых множеств A и B (конечных или бесконечных) возможно одно и только одно из трёх утверждений:

1) $|A| = |B|$, или A и B равномо́щны;

2) $|A| > |B|$, или A мощне́е B, т. е. A содержит подмножество, равномо́щное B, но A и B не равномо́щны;

3) $|A| < |B|$, или B мощне́е A, в этом случае B содержит подмножество, равномо́щное A, но A и B не равномо́щны.[1]

Мощность множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ обозначается символом $\aleph_0$ («а́леф-нуль»). Множество называется *бесконечным*, если его мощность $\geqslant \aleph_0$. *Счётным* называется (бесконечное) множество, элементы которого можно занумеровать натуральными числами, т. е. установить взаимно однозначное соответствие между этим множеством и множеством всех натуральных чисел. Как доказал Г. Кантор, множество всех рациональных чисел и даже множество всех алгебраических чисел[2] – счётны, однако множество всех действительных чисел – несчётно. Таким образом, счётные множества – это «самые маленькие» из бесконечных множеств. Следующие кардинальные числа в порядке возрастания обозначаются $\aleph_1, \aleph_2, \ldots$.

Про множества, равномощные множеству всех действительных чисел, говорят, что они имеют *мощность континуум* (от лат. continuum – непрерывное), и мощность таких множеств обозначается символом c. К ним, например, относятся совокупность всех точек отрезка прямой, а также множество всех трансцендентных[3] чисел. Континуум-гипотеза утверждает, что $c = \aleph_1$.

Существуют множества мощности выше континуума, более того, справедлива теорема: для любого множества A существу-

[1] Ситуация, в которой A и B не равномощны и ни в одном из них нет части, равномощной другому, невозможна (это следует из теоремы Цермело). Иначе это означало бы существование несравнимых между собой мощностей. Ситуация, в которой одновременно $|A| > |B|$ и $|A| < |B|$, невозможна по теореме Кантора–Бернштейна.

[2] *Алгебраические числа* – это числа, являющиеся корнями целых алгебраических уравнений вида $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0 = 0$, где $a_0, ..., a_n$ – целые числа. Например, $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ – алгебраическое число, так как является корнем уравнения $x^2 - 4x + 1 = 0$. Все рациональные числа и числа, записанные радикалами, являются алгебраическими. Действительные числа, не являющиеся алгебраическими, относятся к *трансцендентным*.

[3] *Трансцендентное число* (от лат. transcendere – переходить, превосходить) – это действительное или компле́ксное число, не являющееся алгебраическим, иными словами, число, которое не может быть корнем многочлена с целыми коэффициентами. Например, $\pi, e, \pi + e^\pi, \lg 2, 2^{\sqrt{2}}$, а также $\sin a, \cos a, \operatorname{tg} a$ для любого ненулевого алгебраического числа a.

ет множество B бóльшей мощности. Из теоремы следует, что множества самой большой мощности не существует.

Перечислим основные *свойства*, связанные с мощностью множеств.

1. Два конечных множества равномощны тогда и только тогда, когда они состоят из одинакового числа элементов. То есть для конечного множества понятие мощности множества совпадает с привычным понятием количества элементов множества.

2. Любое подмножество счётного множества конечно или счётно.

3. Объединение конечного или счётного числа счётных множеств счётно.

4. Всякое бесконечное множество содержит счётное подмножество.

5. Для бесконечных множеств, в отличие от конечных, мощность множества может совпадать с мощностью своего собственного подмножества, например $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$. Более того, множество бесконечно тогда и только тогда, когда оно содержит равномощное собственное (т. е. не совпадающее с основным множеством) подмножество.

6. Удаление или добавление конечного числа элементов не меняет мощности бесконечного множества.

7. Теорема Кантора[1] гарантирует существование более мощного множества для любого данного: «Множество всех подмножеств множества A мощнее множества A, или $|2^A| > |A|$»[2].

[1] Георг *Ка́нтор* (1845–1918) – немецкий математик. Он наиболее известен как создатель теории множеств, ставшей краеугольным камнем в математике. Кантор ввёл понятие взаимно однозначного соответствия между элементами множеств и доказал, что действительных чисел «больше», чем натуральных.

[2] Множество всех подмножеств множества X (включая пустое подмножество и само множество) называется булеаном и обозначается: $2^X = \{A \mid A \subseteq X\}$. Обозначение происходит из того, что $\left|2^X\right| = 2^{|X|}$ в случае конечных множеств. Множество, мощность которого равна 2^c, называется множеством мощности *гиперконтинуума*. Что касается проблемы существования множества промежуточной мощности (например, между континуумом и гиперконтинуумом), то оказалось, что это утвер-

Пример 41. Известен *парадокс Кантора* – парадокс теории множеств, который демонстрирует, что предположение о существовании множества всех множеств ведёт к противоречиям и, следовательно, противоречивой является теория, в которой построение такого множества возможно. □

8. Множество всех конечных подмножеств счётного множества счётно.

9. Множество всех подмножеств счётного множества континуально.

10. Мощность декартова произведения: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$. В частности, прямое произведение конечного числа счётных множеств счётно.

11. Декартово произведение бесконечного множества A с самим собой равномощно A.

12. Формула включения-исключения для мощностей пересекающихся множеств в простейшем виде:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Пример 42. Примеры множеств мощности континуум: отрезок $[a, b]$, множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$, множество всех перестановок натурального ряда $\mathbb{N}$, ка́нторово множество.[1]

3.2.5 Логические кванторы и высказывания. Составление отрицаний

Из курса математической логики в практику вошли логические символы (знаки, кванторы), в частности, такие общеизвестные

ждение невозможно доказать на основе аксиом теории множеств, но оно и не противоречит им.

[1]Классическое построение. Из единичного отрезка $C_0 = [0, 1]$ удалим среднюю треть, т. е. интервал $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Оставшееся множество обозначим через C_1. Множество $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ состоит из двух отрезков; удалим теперь из каждого отрезка его среднюю треть, и оставшееся множество обозначим через C_2. Повторив эту процедуру опять, удаляя средние трети у всех четырёх отрезков, получаем C_3. Дальше таким же образом получаем последовательность замкнутых множеств $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \ldots$ Пересечение $C = \bigcap_{i=0}^{\infty} C_i$ называется *канторовым множеством*. Описано в 1883 году Г. Кантором.

как $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$. Они используются в математике для краткости записи математических высказываний. Напомним значения наиболее употребительных кванторов:

$\forall$ — квантор всеобщности; заменяет собой словосочетания «для любого», «для каждого», «для всех»;

$\exists$ — квантор существования; заменяет собой слова «существует», «найдётся», «имеется»; $\nexists$ – перечёркнутый знак означает «не существует»;

$\Rightarrow$ — знак следования (импликации); запись $A \Rightarrow B$ означает, что «из A следует B», «A влечёт B», или «B следует из A»;

$\Leftrightarrow$ — знак равносильности (эквивалентности); запись «$A \Leftrightarrow B$» означает, что «B следует из A» и «A следует из B». Иначе: «A равносильно B», «A необходимо и достаточно для B»; «A тогда и только тогда, когда B»;

$\vee$ — знак дизъюнкции, заменяет союз «или»; запись «$A \vee B$» означает, что имеет место хотя бы одно из высказываний A или B;

$\wedge$ — знак конъюнкции, заменяет союз «и»;

$\neg A$ — знак отрицания, запись $\neg A$ означает «не A» (отрицание высказывания A).

Пример 43. Пусть имеются три высказывания:

$A = \{$квадратный трёхчлен $y = ax^2 + bx + c$ принимает положительные значения при всех $x \in \mathbb{R}\}$,

$B = \{D < 0$, где $D = b^2 - 4ac\}$,

$C = \{(D < 0) \wedge (a > 0)\}$.

Тогда справедливы утверждения: $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow C$. $\square$

Часто бывает необходимо составить отрицание того или иного определения. Чтобы это сделать, запомним простое правило. В определении, отрицание которого составляется, следует формально заменить встречающийся квантор всеобщности $\forall$ (любой, всякий) на квантор существования $\exists$ (существует, найдётся), и наоборот, квантор $\exists$ заменить на знак $\forall$. Кроме того, если определение завершается каким-либо неравенством, то

знак в этом неравенстве следует заменить противоположным знаком. Если в определении имеется система условий, то при отрицании вместо неё возникает совокупность отрицаний этих условий. Иными словами, логическое «или» при составлении отрицания заменяется на логическое «и», и наоборот.

В следующем пункте будет показано, как на основе определения ограниченного множества получается его отрицание – определение неограниченного множества.

3.2.6 Ограниченные (неограниченные) множества. Точные грани

Ограниченность сверху (снизу). Верхняя (нижняя) грань. Выше мы упомянули об ограниченных множествах действительных чисел. Рассмотрим это понятие подробнее. Начнём с понятий односторонней ограниченности множеств.

Непустое множество действительных чисел X называется *ограниченным сверху*, если существует действительное число M такое, что для любых $x \in X$ выполняется неравенство $x \leq M$. Число M называется при этом *верхней гранью* (верхней границей, мажора́нтой) множества X. Аналогично, непустое множество действительных чисел X называется *ограниченным снизу*, если существует действительное число m такое, что для любых $x \in X$ выполняется неравенство $x \geq m$. Число m называется *нижней гранью* (нижней границей, минора́нтой) множества X.

Заметим, что если множество имеет хотя бы одну верхнюю (нижнюю) грань, то оно имеет сразу бесконечно много верхних (нижних) граней, поскольку любое число, бóльшее верхней грани (мéньшее нижней грани) также является верхней (нижней) гранью множества X.

Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным с двух сторон, или просто *ограниченным*, если оно ограничено как сверху, так и снизу, т. е. если существуют действительные числа m и M такие, что неравенство $m \leqslant x \leqslant M$ выполняется сразу при всех $x \in X$. При этом числа m и M называют, соответственно, нижней и верхней гранями множества X.

Эквивалентное определение: множество X ограничено, если найдётся такое (положительное) действительное число M, что для любого $x \in X$ верно $|x| \leq M$.

Наряду с ограниченными множествами существуют множества неограниченные. Любое непустое множество действительных чисел является либо ограниченным, либо неограниченным.

Неограни́ченные множества. Неограниченное сверху множество действительных чисел X можно определить, используя приём отрицания, как множество, не являющееся ограниченным сверху. Сформулируем это определение в развёрнутом виде. Для этого в определении ограниченного сверху множества заменим формально квантор $\forall$ (любой, всякий) на квантор $\exists$ (существует, найдётся), и наоборот, квантор $\exists$ заменим на знак $\forall$, кроме того, знак неравенства поменяем на противоположный.

Получим следующее определение: непустое множество X называется *неограниченным сверху*, если для любого (сколь угодно большого) положительного числа M найдётся число $x' \in X$, для которого $x' > M$. Аналогично формулируется определение множества, неограниченного снизу: множество X *не ограничено снизу*, если для любого (сколь угодно большого) положительного числа M найдётся число $x' \in X$, для которого $x' < -M$.

Как следует из определения, множество не ограничено тогда и только тогда, когда оно не ограничено сверху или не ограничено снизу.

Пример 44. Интервал (a, b), отрезок $[a, b]$, а также конечное множество $\{1; 2; 8\}$ представляют собой примеры ограниченных множеств. В самом деле, $\forall x \in [a, b]$ имеем $|x| \leqslant \max(|a|, |b|)$. При этом полупрямая $(-\infty, b)$ и множество целых отрицательных чисел Z_- являются множествами, ограниченными сверху, но не ограниченными снизу. $\square$

Пример 45. Множество значений функции $y = x^2$ ограничено снизу, так как $\forall x \in \mathbb{R}$ имеем $x^2 \geq -100$ (в качестве нижней грани выступило $m = -100$), но при этом область определения этой функции – неограниченное множество: $D(y) = \mathbb{R}$. $\square$

Наибольший и наименьший элементы. Назовём число $\overline{x} \in X$ ($\underline{x} \in X$) *наибольшим* (*наименьшим*) *элементом* множества X, если $\forall x \in X$ выполняется неравенство $x \leq \overline{x}$ ($x \geq \underline{x}$). Отметим, что наибольший (наименьший) элемент множества X, если он существует, то всегда принадлежит множеству.

Пример 46. Наибольший элемент множества $\{x \in \mathbb{R} \mid x \in [a, b]\}$ равен числу b, а наименьший элемент множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел равен 1. $\square$

Не все ограниченные числовые множества имеют наибольший или наименьший элементы.

Пример 47. Не имеют наибольших элементов множества $\{x \in \mathbb{R} \mid x \in [a, b)\}$ и $\{x \in \mathbb{Q} \mid x \in [a, b)\}$. $\square$

Пример 48. Множество иррациональных чисел из сегмента $[0, 3]$ ($\{x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \mid x \in [0, 3]\}$) также не имеет наибольшего элемента. $\square$

Точные грани множества. Введём понятия точных граней числового множества, обобщающих понятия наибольшего и наименьшего элементов (максимума и минимума). Пусть X – ограниченное подмножество упорядоченного[1] множества P. По умолчанию, если не оговорено противное, в качестве P будем рассматривать множество действительных чисел $\mathbb{R}$ и $X \subset \mathbb{R}$.

Опр.1. *Точной* (неуменьшаемой) *верхней гранью* (верхней границей, супре́мумом, от лат. *suprémum* – самый высокий) множества X называется наименьшая из его верхних граней. Обозначение:

$$\sup X.$$

Соответственно, *точной нижней гранью* (нижней границей, и́нфимумом, от лат. *ínfimum* – самый низкий) множества X называют наибольшую из нижних граней. Обозначение:

$$\inf X.$$

Пример 49. Множество $X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ рациональных чисел, квадрат которых меньше двух, не имеет точных верхней и

[1] Т. е. множества, в котором для любых двух элементов a и b имеет место $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$.

нижней граней в $\mathbb{Q}$, но если его рассматривать как подмножество множества действительных чисел, то $\sup X = \sqrt{2}$ и $\inf X = -\sqrt{2}$. $\square$

Заметим, что эти определения ничего не говорят о том, принадлежит ли $\sup X$ и $\inf X$ множеству X или нет. В случае, когда $\overline{x} = \sup X \in X$, говорят, что $\overline{x}$ является *наибольшим элементом* X (супремум достигается на элементе $\overline{x}$). В случае $\underline{x} = \inf X \in X$ говорят, что $\underline{x}$ является *наименьшим элементом* X (инфимум достигается на элементе $\underline{x}$).

Для неограниченного сверху (снизу) множества X по определению иногда полагают $\sup X = +\infty$ ($\inf X = -\infty$). Таким образом, в отличие от наибольшего и наименьшего элементов, точные грани существуют у любого непустого множества $X \subset \mathbb{R}$.

Пример 50. Например, $\inf[a, b] = a$, $\inf(a, b) = a$, $\sup \mathbb{N} = +\infty$. $\square$

Сформулируем определения точных граней, эквивалентные приведённым выше, которые более удобно использовать в доказательствах.

Опр.2. Действительное число $\overline{x}$ называется $\sup X$, если:

1) $\overline{x}$ есть верхняя грань X, т. е. для всех элементов $x \in X$ верно $x \leqslant \overline{x}$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $x' \in X$ такой, что $x' > \overline{x} - \varepsilon$.[1]

Аналогичное определение можно сформулировать и для точной нижней грани. Действительное число $\underline{x}$ называется $\inf X$, если:

1) $\underline{x}$ есть нижняя грань X, т. е. для всех элементов $x \in X$ верно $x \geqslant \underline{x}$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $x' \in X$ такой, что $x' < \underline{x} + \varepsilon$.

Наконец, приведём ещё два определения точных граней, эквивалентные предыдущим.

Опр.3. Действительное число $\overline{x}$ называется $\sup X$, если:

1) $\forall x \in X \Rightarrow x \leqslant \overline{x}$;

2) $\forall x' < \overline{x}\ \exists x \in X \Rightarrow x > x'$.

[1] Т. е. к числу $\overline{x}$ можно сколь угодно близко «приблизиться», двигаясь по элементам множества X; точная грань «вплотную» подходит к X.

Аналогично, действительное число $\underline{x}$ называется $\inf X$, если:

1) $\forall x \in X \Rightarrow x \geqslant \underline{x}$;

2) $\forall x' > \underline{x}\ \exists x \in X \Rightarrow x < x'$.

Теорема (*о существовании конечных точных граней у ограниченных множеств*). Непустое множество действительных чисел, ограниченное сверху, имеет конечную точную верхнюю грань, а ограниченное снизу – конечную точную нижнюю грань.

Свойства точных граней сформулированы в виде задач к данному семинару.

3.2.7 Примеры на меру Лебега некоторых измеримых множеств$^{(*)}$

Понятие меры изучается в функциональном анализе и не входит в начальный курс классического анализа. Мера Лебе́га[1] является обобщением понятия длины промежутка и иногда называется канонической, поскольку она возникла при измерении длин протяжённых объектов в результате длительной эволюции. Мера и интеграл Лебега могут быть определены для абстрактных и топологических пространств, для которых не удаётся определить интеграл Римана. При этом существуют неизмеримые по Лебегу множества.

Мы не будем забегать вперёд и вводить здесь строгих определений измеримых по Лебегу множеств и собственно меры Лебега, и ограничимся, по сути, понятиями множеств меры нуль по Жордану и по Лебегу, которые введём, когда перейдём к изучению интеграла Римана. А сейчас рассмотрим лишь несколько простых примеров на меру Лебега для известных множеств.

Пример 51. Мера множества, составленного из одной точки, равна нулю. Если $P \subset \mathbb{R}$ есть конечный промежуток с концами в точках

[1] Анри Леон *Лебе́г* (1875–1941) — французский математик, профессор Парижского университета, один из основоположников современной теории функций действительной переменной. Известен как создатель меры и интеграла Лебега.

a и b ($a \leqslant b$), то его *мерой Лебега* называется величина $\mu(P) = b - a$, независимо от того, включены концевые точки в промежуток, или нет. То есть мера Лебега конечного промежутка равна его длине. Аналогично, мера Лебега многоугольника на плоскости $\mathbb{R}^2$ равна его площади. □

Пример 52. Множество рациональных чисел, расположенных на отрезке $[0, 1]$, счётно и имеет Лебегову меру нуль. Так как мера отрезка $[0, 1]$ равна единице, то мера множества иррациональных чисел из этого отрезка имеет меру Лебега, равную единице. □

Пример 53. Любое счётное множество действительных чисел имеет меру Лебега 0. В частности, мера Лебега множества алгебраических чисел равна нулю, хотя это множество всюду плотно[1] в $\mathbb{R}$. □

Пример 54. Возникает вопрос: может ли несчётное множество иметь лебегову меру нуль? Ответ положителен: ка́нторово множество является примером множества мощности континуум, мера Лебега которого равна нулю. □

[1] Множество M называется *всюду плотным* в пространстве $\mathbb{R}$, если его замыкание $\overline{M}$ совпадает с $\mathbb{R}$: $\overline{M} = \mathbb{R}$.

3.3 Задачи для самостоятельного решения

Ребус для 5-го класса: «В равенстве 101 – 102 = 1 передвиньте одну цифру так, чтобы оно стало верным».

Задачи на множества:

№139. Пусть $D = [0, 1) \cup \{2\}$. Найти: а) предельные точки D; б) граничные точки D; в) внутренние точки D; г) изолированные точки D.

№140. Пусть $D = [0, 1) \cap \mathbb{Q}$. Найти: а) предельные точки D; б) граничные точки D; в) внутренние точки D; г) изолированные точки D.

№141. Пусть $D = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Найти: а) предельные точки D; б) граничные точки D; в) внутренние точки D; г) изолированные точки D.

№142. Возможно ли, чтобы $D \subset \partial D$, $D \supset \partial D$, $D = \partial D$? Приведите примеры множеств, где это возможно.

№143. Является ли канторово множество открытым или замкнутым в $\mathbb{R}$?

№144. Привести пример множества в $\mathbb{R}$, которое не является ни открытым, ни замкнутым.

№145. Является ли множество открытым или замкнутым в $\mathbb{R}$: а) точка; б) само пространство $\mathbb{R}$; в) пустое множество?

№146. Доказать, что пересечение конечного числа открытых множеств открыто.

№147. Привести пример множества, компактного в $\mathbb{R}$, но не являющегося отрезком.

№148. Привести пример невыпуклого множества на прямой.

№149. *Принцип вложенных отрезков Коши́ — Ка́нтора*: «Для всякой системы вложенных отрезков

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

существует хотя бы одна точка c, принадлежащая всем отрезкам данной системы. Если, кроме того, это система стягивающихся отрезков (длина отрезков системы стремится к нулю:

$\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$), то c — единственная общая точка всех отрезков данной системы. При этом $c = \sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}$».

Верно ли, что система вложенных интервалов также всегда имеет непустое пересечение? А полуинтервалов? Выполняется ли принцип вложенных отрезков на множестве рациональных чисел (т. е. отрезков с рациональными концами)?

Доказать свойства точной верхней и точной нижней граней числовых множеств:

№150. Пусть $\{x\}$ – подмножество $\{y\}$, тогда верны неравенства

$$\text{а) } \sup\{x\} \le \sup\{y\}, \quad \text{б) } \inf\{x\} \ge \inf\{y\}.$$

№151. Пусть $A = \{x\} \cup \{y\}$, тогда верны равенства

$$\text{а) } \sup A = \max(\sup\{x\}, \sup\{y\}); \ \text{б) } \inf A = \min(\inf\{x\}, \inf\{y\}).$$

№152. Пусть $B = \{x\} \cap \{y\}$, тогда верны неравенства

$$\text{а) } \sup B \le \min(\sup\{x\}, \sup\{y\}); \ \text{б) } \inf B \ge \max(\inf\{x\}, \inf\{y\}).$$

№153. [6, № 18] Пусть $\{-x\}$ есть множество чисел, противоположных числам $x \in \{x\}$. Тогда справедливы равенства:

$$\text{а) } \inf\{-x\} = -\sup\{x\}; \quad \text{б) } \sup\{-x\} = -\inf\{x\}.$$

№154. [6, № 19] Пусть $\{x + y\}$ есть множество всех сумм $x + y$, где $x \in \{x\}$, $y \in \{y\}$. Тогда справедливы равенства:

$$\text{а) } \inf\{x+y\} = \inf\{x\}+\inf\{y\}; \ \text{б) } \sup\{x+y\} = \sup\{x\}+\sup\{y\}.$$

№155. [6, № 20] Пусть $\{xy\}$ есть множество всех произведений xy, где $x \in \{x\}$, $y \in \{y\}$, причём $x \ge 0$, $y \ge 0$. Тогда справедливы равенства:

$$\text{а) } \sup\{xy\} = \sup\{x\} \cdot \sup\{y\}; \quad \text{б) } \inf\{xy\} = \inf\{x\} \cdot \inf\{y\}.$$

№156. Пусть $\{x\}$ – множество положительных чисел, причём $\inf\{x\} > 0$. Тогда справедливы равенства:

$$\text{а) } \inf\left\{\frac{1}{x}\right\} = \frac{1}{\sup\{x\}}; \quad \text{б) } \sup\left\{\frac{1}{x}\right\} = \frac{1}{\inf\{x\}}.$$

Решить задачи на нахождение точной верхней и точной нижней граней множеств:

№157. [6, № 16] Показать, что множество всех правильных рациональных дробей $\frac{m}{n}$, где m и n – натуральные числа и $0 < m < n$, не имеет наименьшего и наибольшего элементов. Найти точные нижнюю и верхнюю грани этого множества.

№158. Имеются ли наибольший и наименьший элементы у множеств значений функций $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ и $y = \arcsin(\sin x)$?

Указание: постройте графики этих функций.

№159. Найти $\inf\{X\}$ и $\sup\{X\}$, если: а) $X = \left\{\frac{1}{2} \pm \frac{n}{2n+1}\right\}$; б) $[2\operatorname{arctg} n]$, где $n = 1, 2, ..$; $[a]$ – целая часть числа a.

№160. Найти $\inf\{X\}$ и $\sup\{X\}$, если

$$X = \left\{\frac{(-1)^n}{n} \cdot \sin\frac{\pi n}{2}\right\}, \quad n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}.$$

№161. Найти $\inf\{X\}$ и $\sup\{X\}$, если

$$X = \left\{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \frac{n!!}{n!}\right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

№162. Определить точную нижнюю грань множества значений выражения

$$f(x, y) = \frac{1}{1 - x^2} + \frac{4}{4 - y^2}$$

при условиях $|x| < 1$, $|y| < 2$ и $xy = 1$. Достигается ли она?

№163. Найти точные грани множества значений выражения $3x - 2y$ на множестве переменных x, y, удовлетворяющих условию $4x^2 + y^2 = 16$. Достигаются ли они?

№164. Найти наименьшее и наибольшее значения выражения

$$x^2 + 2y^2, \quad \text{если } x^2 - xy + 2y^2 = 1.$$

№165. Найти точную нижнюю грань множества значений функции

$$y = \frac{x^2}{8} + x\cos x + \cos 2x.$$

Достигается ли она?

Разные задачи:

№166. Дано число $A = \dfrac{\pi^2 - 1}{4}$. Какое из равенств может быть верным:

1) $A = 1 + \sqrt{1.5}$; 2) $A = 2\frac{23}{99}$; 3) $A = 2.22...$;

4) $A = 2.22401094(621)$; 5) $A = \frac{29}{40}\pi$?

№167. Доказать, что между двумя рациональными числами α и β всегда можно найти иррациональное число.

№168. Показать, что произведение рационального (не равного нулю) числа p и иррационального числа r есть иррациональное число.

№169. Определить все рациональные значения параметров a и b, для которых один из корней уравнения

$$3x^3 + ax^2 + bx + 12 = 0$$

равен $1 + \sqrt{3}$.

№170. При каких целочисленных значениях параметра m корни уравнения являются рациональными числами:

а) $x^2 + mx + 1 = 0$; б) $x^2 + x + m = 0$?

№171. Сколько решений имеет уравнение

$$x + [100x] = 100x \quad ([x] - \text{целая часть } x)?$$

Сколько среди них иррациональных?

3.4 Ответы и решения

Ответ на ребус. Если цифру 2 в числе 102 передвинуть вверх, на место показателя степени, то исходное равенство примет вид $101 - 10^2 = 1$ и будет верным.

Возможно другое решение: если предположить что числа представлены в троичной системе, то получаем такой вариант перестановки: $110 - 102 = 1$.

139. а) $[0,1]$; б) $\{0;1;2\}$; в) $(0,1)$; г) $\{2\}$.

140. а) $[0,1]$; б) $[0,1]$; в) внутренних точек нет; г) изолированных точек нет.

141. а) $\{0\}$; б) $\{0\}\cup D$; в) внутренних точек нет; г) множество изолированных точек D совпадает с D.

142. а) Да, рассмотрим множество, состоящее из рациональных чисел, принадлежащих интервалу (a,b). Границей такого множества является отрезок $[a,b]$. Очевидно, что $D \subset \partial D$. б) Да, например, $D = [a,b]$, $\partial D = \{a;b\}$. в) Да, например, $D = \{a\}$, $\partial D = \{a\}$.

143. Дополнение к Канторову множеству – счётное объединение интервалов. Оно открыто. Значит, Канторово множество замкнуто.

144. Например, полуинтервал $[a,b)$.

145. а) Замкнутое множество; $\mathbb{R}$ – одновременно открытое и замкнутое множество в $\mathbb{R}$; в) $\varnothing$ – одновременно открытое и замкнутое множество в $\mathbb{R}$.

146. Достаточно доказать для двух открытых множеств U и V, что их пересечение $U \cap V$ открыто. Действительно, возьмём произвольную точку $x \in U \cap V$. Так как U и V открыты, то найдутся $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ такие, что $(x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1) \in U$, $(x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2) \in V$. Возьмём $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, т. е. нашлось $\varepsilon > 0$ такое, что $x \in U \cap V$ вместе с ε-окрестностью. Значит, множество $U \cap V$ открыто.

147. Объединение двух непересекающихся отрезков.

148. Например, объединение двух непересекающихся интервалов.

149. Для вложенных интервалов – нет, рассмотрите пример:

$$(0,1) \supset \left(0,\frac{1}{2}\right) \supset \left(0,\frac{1}{3}\right) \supset ...$$

Система вложенных полуинтервалов также может не иметь общей точки (например, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(0,\frac{1}{n}\right] = \varnothing$). Что касается отрезков с рациональными концами, то, взяв отрезки, имеющие концы в рациональных приближениях числа, скажем, $\sqrt{2}$, левые – в приближениях по недостатку, правые – по избытку, получим в качестве общей точки этот самый $\sqrt{2}$, не принадлежащий множеству $\mathbb{Q}$.

150. а) Предположим, от противного, что $\{x\} \subseteq \{y\}$, но $\sup\{x\} > \sup\{y\}$. С одной стороны, по определению точной верхней грани множества $\{x\}$, для

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\sup\{x\} - \sup\{y\}) > 0$$

в $\{x\}$ найдётся элемент x' такой, что $x' > \sup\{x\} - \varepsilon$ $(> \sup\{y\})$, т. е. x' будет строго больше любого элемента $y \in \{y\}$ (так как $\forall y \in \{y\}$ удовлетворяет условию $y \leq \sup\{y\}$). Имеем:

$$y \leq \sup\{y\} < x' \leq \sup\{x\}. \tag{3.1}$$

С другой стороны, так как $\{x\} \subseteq \{y\}$, то для x' обязательно найдутся два числа $y', y'' \in \{y\}$ такие, что

$$y' \leq x' \leq y'' \ (\leq \sup\{y\}). \tag{3.2}$$

Но условия (1) и (2) взаимно противоречивы, что доказывает невозможность предположения $\sup\{x\} > \sup\{y\}$. Значит, $\sup\{x\} \leq \sup\{y\}$. Утверждение доказано.

б) Доказывается аналогично.

151. а) *1-й способ.* Предположим, от противного, что $\sup A > \max(\sup\{x\}, \sup\{y\})$. Это означает, что в $A = \{x\} \cup \{y\}$ существует элемент, строго больший и $\sup\{x\}$, и $\sup\{y\}$, а значит, строго больший всех элементов как из $\{x\}$, так и из $\{y\}$. Но множество $\{x\} \cup \{y\}$ состоит только из элементов

$\{x\}$ и $\{y\}$. Пришли к противоречию. Если предположить, что $\sup A < \max(\sup\{x\}, \sup\{y\})$, то это означает, что существует элемент из $\{x\}$ (или из $\{y\}$), строго больший всех элементов из объединения $A = \{x\} \cup \{y\}$. Противоречие. Следовательно, единственно возможный случай: $\sup A = \max(\sup\{x\}, \sup\{y\})$.

Например: $\{x\} = \{1; 2; 3\}$, $\{y\} = \{3; 4; 5; 6\}$, тогда $\sup\{x\} = 3$, $\sup\{y\} = 6$, $\{x\} \cup \{y\} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $\sup(\{x\} \cup \{y\}) = 6$.

2-й способ. Так как $\{x\} \in A$, $\{y\} \in A$, то $\sup\{x\} \leq \sup A$, $\sup\{y\} \leq \sup A$, но тогда $\max(\sup\{x\}, \sup\{y\}) \leq \sup A$. Осталось исключить случай $\max(\sup\{x\}, \sup\{y\}) < \sup A$. Действительно, если предположить, что это так, то в объединении двух множеств существует элемент, строго больший любого из элементов $\{x\}$ и $\{y\}$, что невозможно. Противоречие. Следовательно, утверждение доказано.

б) Доказывается аналогично.

152. а) Пусть, ради определённости, $\min(\sup\{x\}, \sup\{y\}) = \sup\{x\}$. Предположим, от противного, что $\sup B > \sup\{x\}$. Это означает, что существует элемент пересечения $\{x\} \cap \{y\}$ (а он принадлежит одновременно как $\{x\}$, так и $\{y\}$), строго больший всех элементов множества $\{x\}$. Противоречие. Следовательно, $\sup B \leq \sup\{x\}$. Симметричный случай, когда $\min(\sup\{x\}, \sup\{y\}) = \sup\{y\}$, рассматривается аналогично. Утверждение доказано.

Приведём пример множеств, когда имеет место строгое неравенство $\sup B < \min(\sup\{x\}, \sup\{y\})$: $\{x\} = (-\infty, \frac{5}{2})$, $\{y\} = \{1; 2; 3\} \Rightarrow \{x\} \cap \{y\} = \{1; 2\}$, $\sup B = 2 < \min\left(\frac{5}{2}, 3\right) = \frac{5}{2}$.

В следующем примере выполняется равенство $\sup B = \min(\sup\{x\}, \sup\{y\})$: $\{x\} = (1, 3]$, $\{y\} = [2, 4) \Rightarrow \{x\} \cap \{y\} = [2, 3]$, $\sup B = 3 = \min(3; 4)$.

б) Доказывается аналогично.

153. а) Пусть $\sup\{x\} = \overline{M} < +\infty$, тогда, по определению точной верхней грани, $\forall x \in \{x\}\ x \leq \overline{M}$ и $\forall \varepsilon > 0\ \exists x' \in \{x\}$ такой, что $\overline{M} - \varepsilon < x' \leq \overline{M}$. Умножая основные неравенства в этом определении на минус единицу, получаем: $\forall(-x) \in \{-x\}$ выполняется $-x \geq -\overline{M}$ и, кроме того, $\forall \varepsilon > 0\ \exists(-x') \in \{-x\}$ та-

кой, что $-\overline{M} \le -x' < -\overline{M} + \varepsilon$. По определению точной нижней грани это означает, что число $(-\overline{M})$ есть точная нижняя грань $\{-x\}$, т. е. $\inf\{-x\} = -\overline{M}$. Утверждение доказано для случая конечного $\overline{M}$. Если $\overline{M} = +\infty$, то множество $\{x\}$ не ограничено сверху, но тогда множество $\{-x\}$ не ограничено снизу, а значит $\inf\{-x\} = -\infty$. Утверждение полностью доказано.

б) Доказывается аналогично.

154. Доказательство. а) Пусть $\inf\{x\} = m' > -\infty$, $\inf\{y\} = m'' > -\infty$. Тогда, по определению точной нижней грани, $\forall x \in \{x\}$ и $\forall y \in \{y\}$ верно

$$x \ge m',\ y \ge m'', \tag{1}$$

а также $\forall \varepsilon > 0\ \exists x' \in \{x\}$ и $\exists y' \in \{y\}$ такие, что

$$m' \le x' < m' + \frac{\varepsilon}{2}, \quad m'' \le y' < m'' + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Складывая почленно неравенства (1), получаем, что $\forall x + y \in \{x + y\}$

$$x + y \ge m' + m'', \tag{3}$$

а складывая неравенства (2), имеем, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists (x' + y') \in \{x + y\}$ такой, что

$$m' + m'' \le x' + y' < m' + m'' + \varepsilon. \tag{4}$$

Система неравенств (3), (4) означает, что число $m' + m''$ является точной нижней гранью множества $\{x + y\}$, т. е. $\inf\{x + y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\}$. Случай, когда хотя бы одна из точных граней $\inf\{x\}, \inf\{y\}$ равна $-\infty$, рассмотрите самостоятельно.

б) Доказывается аналогично.

155. Доказательство. а) Пусть $\sup\{x\} = M' < +\infty$, $\sup\{y\} = M'' < +\infty$. Рассмотрим вначале случай, когда $M' > 0$ и $M'' > 0$. Тогда, по определению точной верхней грани, $\forall x \in \{x\}$ и $\forall y \in \{y\}$ верно

$$0 \le x \le M', \quad 0 \le y \le M'', \tag{1}$$

а также для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ $\exists x' \in \{x\}$ и $\exists y' \in \{y\}$ такие, что

$$0 < M' - \varepsilon < x' \leq M', \quad 0 < M'' - \varepsilon < x' \leq M''. \tag{2}$$

Перемножая почленно неравенства (1), получаем, что $\forall xy \in \{xy\}$

$$0 \leq xy \leq M'M'', \tag{3}$$

а перемножая неравенства (2), имеем, что для достаточно малого $\varepsilon > 0$ $\exists x'y' \in \{xy\}$ такой, что

$$M'M'' - (\varepsilon M' + \varepsilon M'' - \varepsilon^2) < x'y' \leq M'M''. \tag{4}$$

Так как величина $\varepsilon M' + \varepsilon M'' - \varepsilon^2$ может быть сколь угодно малой, то система неравенств (3),(4) означает, что число $M'M''$ является точной верхней гранью множества $\{xy\}$, т. е. $\sup\{xy\} = \sup\{x\} \cdot \sup\{y\}$. Случаи, когда точные грани $\sup\{x\}$, $\sup\{y\}$ обращаются в $+\infty$ или 0, рассмотрите самостоятельно.

б) Доказывается аналогично.

156. Доказательство. а) Из положительности чисел x следует положительность $\sup\{x\}$. Пусть $\sup\{x\} = M < +\infty$. По определению точной верхней грани, $\forall x \in \{x\}$ выполняется

$$0 < x \leq M, \tag{1}$$

и для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ $\exists x' \in \{x\}$ такой, что

$$0 < M' - \varepsilon < x' \leq M. \tag{2}$$

Обращая неравенство (1), получаем, что $\forall \dfrac{1}{x} \in \left\{\dfrac{1}{x}\right\}$

$$\frac{1}{M} \leq \frac{1}{x} < +\infty, \tag{3}$$

а обращая неравенство (2), имеем, что для достаточно малого $\varepsilon > 0$ $\exists \dfrac{1}{x'} \in \left\{\dfrac{1}{x}\right\}$:

$$\frac{1}{M} \leq \frac{1}{x'} < \frac{1}{M - \varepsilon} = \frac{1}{M} + \frac{\varepsilon}{M(M - \varepsilon)}. \tag{4}$$

Так как величина $\dfrac{\varepsilon}{M(M-\varepsilon)}$ может быть сколь угодно малой, то система неравенств (3),(4) означает, что $\dfrac{1}{M}$ является точной нижней гранью множества $\left\{\dfrac{1}{x}\right\}$, т. е. $\inf\left\{\dfrac{1}{x}\right\} = \dfrac{1}{\sup\{x\}}$.

В случае $\sup\{x\} = +\infty$ имеем $\inf\left\{\dfrac{1}{x}\right\} = 0 = \dfrac{1}{\sup\{x\}}$, и, таким образом, доказываемое равенство также выполняется.

б) Доказывается аналогично. Решить задачи на нахождение точных граней и доказательство того, что данное число является точной гранью множества.

157. 1) Из очевидных неравенств

$$\frac{m}{n} = \frac{2m}{2n} > \frac{2m-1}{2n} > 0, \quad \frac{m}{n} = \frac{2m}{2n} < \frac{2m+1}{2n} < 1$$

следует, что множество всех правильных положительных рациональных дробей не имеет ни наименьшего, ни наибольшего элементов. Действительно, если предположить, что существует наименьший (наибольший) элемент $\dfrac{m}{n}$, то из приведенных выше неравенств видно, как можно построить правильную рациональную дробь как меньшую, так и большую его.

2) Найдём точные грани. Зафиксируем любое сколь угодно малое $\varepsilon > 0$ и покажем, что найдётся рациональное положительное число, меньшее ε. Так, взяв произвольное натуральное m, будем увеличивать n до тех пор, пока не получим $0 < \dfrac{m}{n} < \varepsilon$ (достаточно взять $n > \dfrac{m}{\varepsilon}$, например, $n = \left[\dfrac{m}{\varepsilon}\right] + 1$). Это означает, что $\inf\left\{\dfrac{m}{n}\right\} = 0$. С другой стороны, для произвольного $\varepsilon > 0$ легко подобрать правильную дробь, большую $1-\varepsilon$. Например, взяв произвольное $k \in \mathbb{N}$, будем увеличивать $m \in \mathbb{N}$ до тех пор, пока не будет выполняться неравенство $1-\varepsilon < \dfrac{m}{m+k} < 1$ (достаточно взять $m > \dfrac{k(1-\varepsilon)}{\varepsilon}$). Это означает, что $\sup\left\{\dfrac{m}{n}\right\} = 1$.

158. Обе функции периодичны, первая с периодом π, вторая с периодом 2π. Достаточно построить вначале их графики на

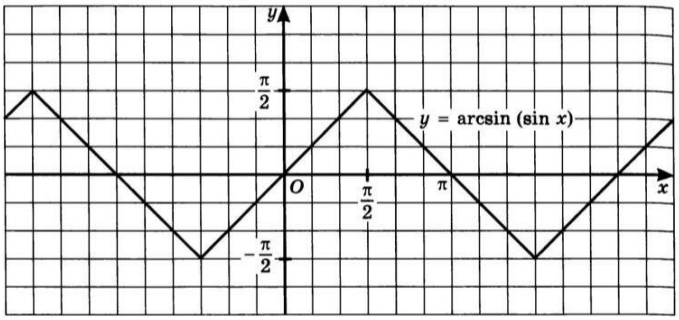

Рис. 4: График функции $y = \arcsin(\sin x)$.

одном периоде, а потом периодически продолжить. У первой из функций множество значений есть $E(\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ и поэтому наименьший и наибольший элементы не существуют. У второй функции (см. Рис. 4) $\min E(y) = -\frac{\pi}{2}$, $\max E(y) = \frac{\pi}{2}$.

159. а) Представим множество X в виде объединения двух множеств: $X_1 = \left\{\frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1}\right\}$ и $X_2 = \left\{\frac{1}{2} - \frac{n}{2n+1}\right\}$. Ясно, что $\sup\{X\} = \sup\{X_1\}$, $\inf\{X\} = \inf\{X_2\}$. Из очевидных оценок для дроби $\dfrac{n}{2n+1}$:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)} = \frac{(n+1)-1}{2(n+1)} = \frac{n}{2(n+1)} < \frac{n}{2n+1} < \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

следует, что величину $\dfrac{n}{2n+1}$ с ростом n можно сделать сколь угодно близкой к числу $\dfrac{1}{2}$. Предположим поэтому, что $\inf\{X\} = 0$, а $\sup\{X\} = 1$. Докажем это более строго. Зафиксируем любое сколь угодно малое $\varepsilon > 0$, составим и решим относительно n два неравенства:

$$0 < \frac{1}{2} - \frac{n}{2n+1} < \varepsilon, \quad 1 - \varepsilon < \frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1} < 1.$$

Получим, что при $n > \dfrac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}$ оба неравенства выполняются, а

это и означает, по определению точных граней, что $\inf\{X\} = 0$, $\sup\{X\} = 1$.

б) Так как $\dfrac{\pi}{4} \leq \operatorname{arctg} n < \dfrac{\pi}{2}$, а значит, $\dfrac{\pi}{2} \leq 2\operatorname{arctg} n < \pi$, причём $\dfrac{\pi}{2}$ и π – точные грани. Следовательно, $[2\operatorname{arctg} n]$ может принимать значения 1, 2 или 3, поэтому $\inf[2\operatorname{arctg} n] = 1$, $\sup[2\operatorname{arctg} n] = 3$.

160. Ответ: $\sup X = \frac{1}{3}$, $\inf X = -1$.

161. Указание: $n! = n!! \cdot (n-1)!!$, поэтому

$$\frac{n!!}{n!} = \begin{cases} \frac{1}{(2k-1)!!}, & \text{если } n = 2k, \\ \frac{1}{(2k)!!}, & \text{если } n = 2k+1, \end{cases}$$

т. е. $\frac{n!!}{n!} \to 0$ при $n \to +\infty$.

Ответ: $\sup X = \frac{1}{2}$, $\inf X = -1$.

162. Данная задача предлагалась на Олимпиаде «Ломоносов–2018», 9 кл., заключительный этап, но в ней следовало найти не точную нижнюю грань, а наименьшее значение выражения, что в данном случае не меняет смысла задачи. Согласно неравенству Коши имеем:

$$\frac{1}{1-x^2} + \frac{4}{4-y^2} \geqslant 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{4}{4-y^2}} = \frac{4}{\sqrt{5-4x^2-y^2}} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{1-(2x-y)^2}} \geqslant 4,$$ причём все неравенства обращаются в равенства тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} 2x = y, \ xy = 1, \\ |x| < 1, \ |y| < 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

163. *1-й способ.* Приведём уравнение к виду $(\frac{x}{2})^2 + (\frac{y}{4})^2 = 1$ и сделаем тригонометрическую подстановку $x = 2\cos t$, $y = 4\sin t$, тогда $A = 3x - 2y = 6\cos t - 8\sin t = 10(\frac{3}{5}\cos t - \frac{4}{5}\sin t) = 10\sin(\varphi - t)$, где $\varphi = \arcsin\frac{3}{5}$. Тогда точные грани равны $\inf A = -10$, $\sup A = 10$ (являются наименьшим и наибольшим значениями). Пары (x, y), на которых они достигаются, найдите самостоятельно.

2-й способ. Положим $a = 3x - 2y \Rightarrow y = \frac{3x-a}{2}$. Подставим в уравнение: $4x^2 + y^2 = 16 \Leftrightarrow 25x^2 - 6ax + a^2 - 64 = 0$. Переформулируем задачу: «При каких a уравнение имеет решения?» Это выполняется тогда и только тогда, когда $D = 4(9a^2 - 25(a^2 - 64)) \geqslant 0 \Leftrightarrow a^2 \leqslant 100$, откуда приходим к ответу.

164. 1) Найдём наибольшее значение. Обозначим $a = x^2 + 2y^2$. Так как $(x - \sqrt{2}y)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 \geqslant 2\sqrt{2}xy = 2\sqrt{2}(x^2 + 2y^2 - 1)$, то $a \geqslant 2\sqrt{2}(a-1)$, откуда находим $a \leqslant \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $x = \sqrt{2}y$.

2) Найдём наименьшее значение. Поскольку $(x + \sqrt{2}y)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 \geqslant -2\sqrt{2}xy = -2\sqrt{2}(x^2 + 2y^2 - 1)$, то $a \geqslant \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1}$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $x = -\sqrt{2}y$.

165. Выделяя полный квадрат, получаем

$$y = \frac{x^2}{8} + x\cos x + \cos 2x = \frac{1}{8}(x + 4\cos x)^2 - 1.$$

Так как выражение в скобках может обращаться в нуль (графики $y = \cos x$ и $y = -\frac{x}{4}$, очевидно, пересекаются), то точная нижняя грань достигается и равна (-1).

166. 1) Неверно, т. к. $1 + \sqrt{1.5}$ – алгебраическое число, а $\frac{\pi^2-1}{4}$ – трансцендентное.

2) Неверно, т. к. $2\frac{23}{99}$ – обыкновенная дробь (рациональное число), т. е. алгебраическое число.

3) Возможно. Если проверить на калькуляторе, то это верно.

4) Неверно, т. к. $2.22401094(621)$ – периодическая дробь, т. е. рациональное число (а значит, алгебраическое).

5) Предположим, что $\dfrac{\pi^2 - 1}{4} = \dfrac{29}{40}\pi$, тогда перепишем это равенство в виде

$$10\pi^2 - 29\pi - 10 = 0,$$

т. е. число π является корнем алгебраического уравнения $10x^2 - 29x - 10 = 0$, что невозможно в силу его трансцендентности.

Замечание. Задача предлагалась на тестировании школьникам, поступающим на экономический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

167. Рассмотрим пример, как построить иррациональное число, заключив его между двумя заданными рациональными числами. Пусть, ради определённости, $\alpha < \beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{Q})$, тогда $\alpha < \alpha + (\beta - \alpha) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} < \beta$, где число $x = \alpha + (\beta - \alpha) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ иррационально. Здесь используется свойство, что произведение рационального числа (отличного от нуля) и иррационального числа есть число иррациональное число, а также, что сумма (разность) рационального и иррационального чисел есть число иррациональное.

168. Предположим, от противного, что это не так. Тогда $p \cdot r = q$ $(q \in \mathbb{Q})$, откуда $r = \frac{p}{q}$, но отношение двух рациональных чисел (как отношение двух обыкновенных дробей) рационально, пришли к противоречию.

169. Подставим корень в уравнение:

$$3(1+\sqrt{3})^3 + a(1+\sqrt{3})^2 + b(1+\sqrt{3}) + 12 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(2a + b + 18)\sqrt{3} = -(4a + b + 42).$$

Слева от знака равенства мы видим произведение рационального числа $2a + b + 18$ и иррационального числа $\sqrt{3}$, а справа – рациональное число $-(4a + b + 42)$. Такое равенство возможно в единственном случае, когда

$$\begin{cases} 2a + b + 18 = 0, \\ -(4a + b + 42) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = -12, \\ b = 6. \end{cases}$$

170. а) Найдём корни уравнения: $x_{1,2} = \dfrac{-m \pm \sqrt{m^2 - 4}}{2}$. Поскольку $x \in \mathbb{Q}$, то корни будут рациональны, только если найдётся $a \in \mathbb{Z}$, $a \geqslant 0$: $\sqrt{m^2 - 4} = a \Leftrightarrow m^2 - a^2 = 4 \Leftrightarrow (m - a)(m + a) = 4$. Так как $m - a \leqslant m + a$, то возможны случаи: 1) $m - a = 1$, $m + a = 4$; 2) $m - a = -4$, $m + a = -1$; 3) $m - a = 2$, $m + a = 2$; 4) $m - a = -2$, $m + a = -2$, рассматривая которые, приходим к ответу: $m = 2$ $(a = 0)$, $m = -2$ $(a = 0)$.

б) Корни $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4m}}{2}$. Чтобы $x \in \mathbb{Q}$, необходимо выполнение равенства $\sqrt{1-4m} = a$ ($a \in \mathbb{Z}$, $a \geqslant 0$). Отсюда имеем $(1-a)(1+a) = 4m$. Так как справа стоит чётное число, то слева также должно быть чётное число, но это означает, что a должно быть нечётным, т. е. $a = 2l+1$ ($l \in \mathbb{Z}$, $l \geqslant 0$). Подставим в последнее уравнение: $-2l(2l+2) = 4m$, откуда $m = -l(l+1)$. Ответ: при $m = -l(l+1)$, где $l \in \mathbb{Z}$, $l \geqslant 0$.

171. Преобразуем уравнение к виду $x = \{100x\}$, отсюда получаем, что $x \in [0,1)$. Следовательно, $x = 0, a_1a_2a_3... \Rightarrow 100x = a_1a_2, a_3a_4... \Rightarrow \{100x\} = 0, a_3a_4...$ Подставим в уравнение:

$$0, a_1a_2a_3a_4... = 0, a_3a_4a_5a_6...$$

Это возможно тогда и только тогда, когда совпадают цифры в соответствующих разрядах. Отсюда приходим к системе

$$\begin{cases} a_1 = a_3 = a_5 = ... = a_{2k+1} = ..., \\ a_2 = a_4 = a_6 = ... = a_{2k} = ..., \end{cases}$$

т. е. $x = 0, (a_1a_2)$. Отсюда видим, что все решения – рациональные числа. Найдём их количество. Цифра a_1 может принимать 10 значений (от 0 до 9), при этом для каждого такого значения вторая цифра a_2 также может принимать 10 значений (от 0 до 9). Всего имеем (согласно правилу умножения из комбинаторики) 10×10 возможностей, но надо исключить случай $x = 0, 999... = 0, (9) = 1, (0)$, поскольку $x \in [0,1)$. Итак, уравнение имеет 99 рациональных корней.

4 СЕМИНАР: Последовательности действительных чисел

«Пределы наук походят на горизонт: чем ближе подходят к ним, тем более они отодвигаются».

Пьер Буаст (1765–1824) – французский учёный и поэт, составитель словарей.

Домашнее задание: 173, 174, 176–180, 182, 184, 186, 198, 199, 202–208.

В данном разделе мы познакомимся с основами математической теории последовательностей на примере последовательностей действительных чисел. Числовые последовательности играют важную роль в математическом анализе. С их помощью можно определить предел функции (по Гейне), а значит, сформулировать такие фундаментальные понятия как непрерывность функции, её дифференцируемость и многое другое. Многие виды последовательностей представляют самостоятельный интерес.

Помимо последовательностей действительных чисел $\{x_n\}$ ($x_n \in \mathbb{R}$), известны их естественные обобщения, изучаемые в курсе математического анализа, такие как последовательности *комплексных чисел* $\{z_n\}$ ($z_n \in \mathbb{C}$), *функциональные последовательности* $\{f_n(x)\}$, где в качестве элементов выступают уже не числа, а функции, а также бесконечные суммы всех членов этих последовательностей – *числовые* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ и *функциональные* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *ряды*. Начнём с определений.

4.1 Понятие числовой последовательности. Ограниченные последовательности. Точные грани. Способы задания. Арифметические операции

Понятие последовательности действительных чисел. Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие единственное действительное число x_n, тогда упорядоченное (счётное) множество чисел

$$x_1, x_2, ..., x_n, ...$$

называется *последовательностью действительных чисел* и обозначается $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, или просто $\{x_n\}$.[1] Числа x_n $(n = 1, 2, ...)$ называют *членами* последовательности. Последовательность чисел может быть *конечной* $x_1, x_2, ..., x_n$ или *бесконечной* $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ По умолчанию будем иметь в виду бесконечные числовые последовательности.

Ограниченные и неограниченные последовательности. Односторонняя ограниченность. Поскольку совокупность всех членов произвольной последовательности чисел представляет собой числовое множество (конечное либо бесконечное), то по отношению к последовательностям применимы все введённые для числовых множеств понятия и определения. Приведём эти определения с поправкой на числовые последовательности.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху* (*снизу*), если существует такое действительное число M (соответственно, m), что $\forall n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $x_n \leq M$ (соответственно, $x_n \geq m$). Или, короче:[2]

$$\{x_n\} - \text{ограничена сверху} \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists\, M \in \mathbb{R} :\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ x_n \leq M.$$

При этом числа M и m называются, соответственно, *верхней и нижней гранями* числовой последовательности. Любая огра-

[1] Так как ниже будут рассмотрены лишь последовательности, состоящие из действительных чисел, то слово «действительный» будем опускать и кратко говорить «последовательность» вместо «последовательность действительных чисел».

[2] Знак $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ означает «по определению».

ниченная сверху (снизу) последовательность имеет бесконечно много верхних (нижних) граней. В частности, любое число $M' > M$ также будет верхней гранью последовательности.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной с двух сторон*, или просто *ограниченной*, если она ограничена одновременно снизу и сверху, т. е. если $\exists\, M \in \mathbb{R}_+ : \forall n \in \mathbb{N}$ $|x_n| \leq M$.[1] Или: последовательность $\{x_n\}$ *ограничена*, если существуют $m, M \in \mathbb{R}$ такие, что $\forall n \in \mathbb{N}$ имеет место

$$m \leqslant x_n \leq M.$$

Наименьшая из всех верхних граней (соответственно, наибольшая из всех нижних граней) называется *точной верхней* (*точной нижней*) гранью последовательности и обозначается

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\} \text{ (соответственно, } \inf_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}).$$

Составляя отрицание указанных определений, получим, например, что последовательность $\{x_n\}$ называется *неограни́ченной сверху* (*снизу*), если для любого[2] действительного числа M (соответственно, любого действительного числа m) найдётся такой (зависящий от M) номер n, что $x_n > M$ (соответственно, $x_n < m$). Или, короче:

$$\{x_n\} - \text{не ограничена сверху} \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\, M \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} :\ x_n > M.$$

Иными словами, последовательность $\{x_n\}$ называется *неограниченной*, если она не ограничена снизу или сверху.

Пример 55. Последовательность с общим членом $x_n = 1/2^n$ ограничена как сверху, так и снизу, поскольку $\forall n \in \mathbb{N}$ верно

$$m = 0 < \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2} = M. \ \square$$

Пример 56. Последовательность $z_n = \cos^3 \dfrac{\pi n}{4}$ также ограничена с двух сторон, так как при любом натуральном n имеем

$$m = -1 \leq \cos^3 \frac{\pi n}{4} \leq 1 = M. \ \square$$

Пример 57. Последовательность $y_n = 3^n$ – ограничена снизу, поскольку при всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $3^n > 0 = m$, но не ограничена сверху,

[1] Здесь $\mathbb{R}_+$ – множество положительных действительных чисел.

[2] Сколь угодно большого.

т. к. для любого сколь угодно большого $M > 0$ можно найти номер n_0, при котором $3^{n_0} > M$. Решив последнее неравенство, найдём $n_0 > \log_3 M$. В качестве n_0 можно взять, например, наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условию $n_0 > \log_3 M$, т. е. $n_0 = [\log_3 M] + 1$. $\square$

Наибольший (наименьший) члены последовательности. Член x_{n_0} ограниченной сверху (снизу) числовой последовательности $\{x_n\}$ называется её *наибольшим* (*наименьшим*) *членом*, если при всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $x_{n_0} \geq x_n$ (соответственно, $x_{n_0} \leq x_n$). Обозначение:

$$\max_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\} = x_{n_0} \text{ (соответственно, } \min_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\} = x_{n_0}).$$

Наибольший (наименьший) член последовательности не обязательно единственен. Например, любой член постоянной последовательности одновременно является как её наименьшим, так и наибольшим членом. Если последовательность является неубывающей (невозрастающей), то её наименьшим (наибольшим) членом будет первый член.

Заметим, что наибольший (наименьший) член существует не у любой ограниченной сверху (снизу) последовательности.

Пример 58. Последовательность $\{\operatorname{arctg} n\}$ ограничена, так как $|\operatorname{arctg} n| < \dfrac{\pi}{2}$, но при этом не имеет ни наибольшего, ни наименьшего членов. $\square$

Если последовательность не ограничена сверху (снизу), то она не имеет наибольшего (наименьшего) члена, а точная верхняя (нижняя) грань множества её членов считается равной $+\infty$ $(-\infty)$.

Способы задания последовательностей. Последовательность можно задать одним из следующих способов.

1. Формулой её общего члена $x_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, где $f(n)$ – некоторая функция натурального аргумента.

Пример 59. Например: $a_n = n^2 + 1$, $b_n = \sin n$, $c_n = (-1)^n$, $d_n = 2^n + 5^{n+1}$,

$$e_n = \begin{cases} \ln n, & \text{если } n = 2k; \\ (-1)^{n^2+1}, & \text{если } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

2. Перечислением конечного числа первых членов:[1]

$$\{a_n\}:\ \frac{1}{2},\frac{3}{2^2},\frac{5}{2^3},\frac{7}{2^4},\ldots \quad\Rightarrow\quad a_n=\frac{2n-1}{2^n},$$

$$\{b_n\}:\ 2,5,10,17,26,\ldots \quad\Rightarrow\quad b_n=n^2+1,$$

$$\{c_n\}:\ -1,\frac{1}{2!},-\frac{1}{3!},\frac{1}{4!},-\frac{1}{5!},\ldots \Rightarrow\ c_n=\frac{(-1)^n}{n!},$$

$$\{d_n\}:\ 7,29,133,641,\ldots \quad\Rightarrow\quad d_n=2^n+5^n,$$

$$\{e_n\}:\ 0,2,0,2,0,2,\ldots \quad\Rightarrow\quad e_n=1+(-1)^n.$$

3. *Рекуррентным соотношением* (формулой, выражающей n-й член через предшествующие один или несколько членов).

Пример 60. Рядом Фибона́ччи[2] называется последовательность чисел $1,1,2,3,5,8,13,21,\ldots$, которая определяется рекуррентно:

$$a_1=a_2=1,\quad a_{n+1}=a_n+a_{n-1},\quad n=2,3,\ldots\ \square$$

Пример 61. Рассмотрим две последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, которые задаются рекуррентно, причём они оказываются связанными между собой ($a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$):

$$a_1=a,\quad b_1=b,\quad a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n},\quad b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}.$$

При $n\to+\infty$ эти последовательности имеют общий предел (определение предела вводится в следующем пункте), называемый *арифметико-геометрическим средним* чисел a и b. $\square$

Знакопостоянные и знакопеременные последовательности. Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется *положительной*, если $x_n\geq 0\ \forall\, n\in\mathbb{N}$. Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется *строго положительной*, если $x_n>0$ $\forall\, n\in\mathbb{N}$. Аналогично определяются отрицательные и строго отрицательные последовательности. Последовательности положительные и отрицательные называют *знакопостоянными* последовательностями. Последовательность называется *знакопе-*

[1] Их количество при этом должно быть таково, чтобы становилась ясной общая закономерность, и по ним можно было однозначно восстановить любой член последовательности. Не всегда это бывает простой задачей.

[2] Леонардо Пизанский, или *Фибоначчи*, – итальянский богослов и математик XIII в.

ременной, если в ней одновременно присутствуют как отрицательные, так и положительные члены. Знакопеременная последовательность называется *знакочередующейся*, если любые два соседних её члена имеют разные знаки.

Пример 62. Последовательность $\{1, 2, -3, -4, 5, 6, -7, -8, ...\}$ является знакопеременной, а $\{1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, -8, ...\}$ – знакочередующейся. □

Любую бесконечную знакочередующуюся последовательность можно представить в виде

$$a_n = (-1)^n b_n \text{ или } a_n = (-1)^{n+1} b_n, \text{ где } b_n > 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Арифметические операции над последовательностями. *Суммой* (*разностью*) последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, называется такая последовательность $\{z_n\}$, обший член которой определяется равенством $z_n = x_n + y_n$ (соответственно, $z_n = x_n - y_n$). *Произведением* двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называется числовая последовательность $\{x_n y_n\}$, а их *частным* – числовая последовательность x_n/y_n $(y_n \neq 0)$.

4.2 Предел последовательности. Сходящиеся и расходящиеся последовательности и их свойства

В штате Калифорния успевающих по математике учеников собираются «сдерживать». Разрыв между успевающими по математике учениками и их менее способными сверстниками должен исчезнуть, заявило министерство образования штата Калифорния в выпущенном 4 мая 2021 г. проекте образовательной программы. При этом склонные к математике дети будут сдерживаться до 6-го класса, что по сути приведёт к упущенной возможности развить их талант в раннем возрасте.

«Мы отвергаем идеи о природной одарённости и таланте», — говорится в программе. Авторы документа настаивают на том, что «не существует границ, определяющих, что один ребенок „одарён“, а другой — нет». Предложение также направлено на «замену представлений о прирождённом „таланте“ и „одарённости“ к математике признанием того,

что каждый ученик находится «на пути роста».

Авторы программы обучения математике решили, что «слишком много учеников отсортировано по разным математическим направлениям в зависимости от их природных способностей». Вместо этого говорится, что одарённые калифорнийские дети обязаны жертвовать своими собственными возможностями — во имя справедливости.

К счастью для калифорнийских учеников (и их родителей), это предложение ещё не внесено в политику Национальной администрации образования США, но существует риск, что Калифорния присоединится к нескольким другим штатам в выполнении этого проекта. Другие штаты, в том числе Орегон, Вирджиния и Иллинойс, с энтузиазмом восприняли эту идею.

Так, в прошлом месяце Вирджиния объявила, что упростит достижение «равенства» в образовании, заменив собственно математику «основополагающими понятиями», и отказавшись от преподавания алгебры, геометрии, тригонометрии и ликвидировав возможность прохождения любого углублённого курса математики до 11-го класса.

Информационное агенство
«Красная Весна», 7 мая 2021 г.

Одной из важнейших характеристик любой числовой последовательности является её сходимость (либо расходимость). Определим эти базовые понятия с помощью нескольких эквивалентных между собой определений сходящейся последовательности.

Понятие конечного предела, сходящейся последовательности.

Опр. 1. Последовательность $\{x_n\}$ называется *сходящейся*, если существует действительное число a такое, что для любого (сколь угодно малого) действительного числа $\varepsilon > 0$ найдётся номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что при всех $n \geqslant N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Обозначения:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a, \quad \text{или} \quad x_n \underset{n\to+\infty}{\to} a.$$

Число a называется в этом случае *пределом* последовательно-

сти $\{x_n\}$.[1] Т. е. сходящаяся последовательность – это последовательность, имеющая конечный предел.

Кратко определение сходящейся к пределу a последовательности можно сформулировать в виде:

$$\{x_n\} \text{ называется } \textit{сходящейся} \overset{def}{\Leftrightarrow}$$

$$\exists a \in \mathbb{R}: \ \forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \ \forall\, n \geqslant N \ \Rightarrow \ |x_n - a| < \varepsilon.$$

Переписав неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ в виде $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$, или $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, получим, что последовательность *сходится*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся натуральный номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что при $\forall n \geqslant N$ выполняется условие: $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Это позволяет сформулировать определение сходящейся последовательности в другом (эквивалентном) виде.

Опр. 2. Последовательность $\{x_n\}$ называется *сходящейся*, если существует действительное число a такое, что в любой ε-окрестности точки a содержатся все элементы последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера (зависящего от ε).

Пример 63. Примеры сходящихся последовательностей:

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}, \left\{\frac{2n+1}{n}\right\}, \left\{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}, \{a^n\} \text{ при } |a| < 1, \ n \in \mathbb{N}.$$

При этом их пределы

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0, \ \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n} = 2, \ \lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0, \ \lim_{n\to+\infty} a^n = 0.$$

Пример 64. Показать, что последовательность $x_n = \dfrac{2n+1}{n}$ сходится к числу 2, доказав по определению, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 2$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное (сколь угодно малое) действительное число $\varepsilon > 0$ и покажем, что для этого ε найдётся номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что при всех $n \geqslant N$ выполняется неравенство

[1] Число a называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что при всех $n \geqslant N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

$\left|\dfrac{2n+1}{n}-2\right|<\varepsilon$. В самом деле, $\left|\dfrac{2n+1}{n}-2\right|=\dfrac{1}{n}$. Решив неравенство $1/n<\varepsilon$, находим $n>1/\varepsilon$. В качестве номера $N=N(\varepsilon)$ можно взять, например, наименьшее из натуральных чисел, превышающих $1/\varepsilon$, т. е. $N=[1/\varepsilon]+1$. $\square$

Помимо конечного предела последовательность может иметь и бесконечный предел.

Понятие бесконечного предела. Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ *стремится к* $+\infty$ (соответственно, *стремится к* $-\infty$) при $n\to+\infty$, если для любого (сколь угодно большого) действительного $M>0$ найдётся натуральный номер N, зависящий от M, такой, что $\forall n\geqslant N$ выполняется $x_n>M$ (соответственно, $x_n<-M$). Обозначения:

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=+\infty\quad\text{(соответственно, }\lim_{n\to+\infty}x_n=-\infty\text{)}$$

$$\text{или } x_n\underset{n\to+\infty}{\to}+\infty\quad\text{(соответственно, } x_n\underset{n\to+\infty}{\to}-\infty\text{)}.$$

Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ *стремится к бесконечности* (без указания знака) при $n\to+\infty$, если для любого действительного $M>0$ найдётся такой зависящий от M номер N, что $\forall n\geqslant N$ выполняется $|x_n|>M$. Обозначения:

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\infty\quad\text{или}\quad x_n\underset{n\to+\infty}{\to}\infty.$$

Расходящиеся последовательности. Если предел последовательности бесконечен либо не существует, то такая последовательность не является сходящейся и говорят, что она *расходится*. В частности, любая неограниченная сверху (снизу) последовательность расходится.

Кратко определение расходящейся к ∞ последовательности можно сформулировать в виде:

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\infty\ \overset{def}{\Leftrightarrow}$$

$$\forall\,E>0\ \exists N=N(E)\in\mathbb{N}:\ \forall\,n\geqslant N\ \Rightarrow\ |x_n|>E.$$

Пример 65. Расходящиеся последовательности:

$$x_n=(-1)^n=\cos\pi n\quad\text{(предел не существует)},$$

$$y_n = a^n \text{ при } |a| > 1 \quad \text{(предел бесконечен).} \ \square$$

Пример 66. Доказать, что последовательность расходится:

$$x_n = \frac{n^3 - 2}{n^2}.$$

Доказательство. Достаточно показать, что данная последовательность не ограничена сверху. Действительно, справедлива оценка

$$x_n = \frac{n^3 - 2}{n^2} = n - \frac{2}{n^2} \geqslant n - 2.$$

Тогда для любого (сколь угодно большого) положительного числа M всегда можно выбрать натуральное число $n = [M] + 3$ так, что неравенство $n - 2 > M$ окажется верным. Следовательно,

$$\forall\, M > 0\ \exists\, n = [M] + 3,\, n \in \mathbb{N} :\ x_n \geqslant n - 2 > M\ \Rightarrow\ x_n > M,$$

что означает, что последовательность расходится. $\square$

Рассмотрим основные свойства сходящихся последовательностей.

Теоремы о сходящихся последовательностях.

Теорема 1 (*о единственности предела сходящейся последовательности*). Сходящаяся последовательность имеет один и только один предел.

Теорема 2 (*об ограниченности сходящейся последовательности*). Если последовательность сходится, то она ограничена. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Пример 67. Например, последовательность $\{(-1)^n\}$, очевидно, ограничена, но не является сходящейся. $\square$

Теорема 3. Точка a является пределом последовательности тогда и только тогда, когда за пределами любой окрестности этой точки находится конечное число элементов последовательности или пустое множество.

Теорема 4. Если у последовательности добавить, отбросить или изменить первые m элементов, то это не повлияет на её сходимость.

Теорема 5. Предел постоянной последовательности[1] равен значению произвольного члена этой последовательности:

[1] Т. е. $x_n = C$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{n\to+\infty} C = C.$$

Следующие три теоремы посвящены арифметическим операциям над сходящимися последовательностями.

Теорема 6 (*о сумме и разности двух сходящихся последовательностей*). Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$. Тогда существует предел суммы и разности этих последовательностей, причём

$$\lim_{n\to+\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b.$$

Замечание. Эту теорему, как и следующую, можно использовать лишь в ситуации, когда количество слагаемых (сомножителей) под знаком предела фиксировано! Если же оно зависит от n, теорема не применима.

Пример 68. Найти предел последовательности

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{n} \right).$$

Решение. Приводя дроби к общему знаменателю, получаем

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n} = 1.$$

Немного удивительно, что, казалось бы, сумма бесконечно малых последовательностей $\frac{1}{n}$ не является бесконечно малой, а даёт в пределе единицу. Но дело в том, что и их количество возрастает. Поэтому результат ожидаем, а теорему здесь просто использовать нельзя. $\square$

Теорема 7 (*о произведении двух сходящихся последовательностей*). Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$. Тогда существует предел произведения этих последовательностей, причём

$$\lim_{n\to+\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b.$$

Теорема 8 (*о частном двух сходящихся последовательностей*). Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$, где $b \neq 0$. Тогда существует предел частного этих последовательностей, причём

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

Следующие утверждения связаны с предельным переходом в неравенствах для последовательностей.

Теорема 9 (*о предельном переходе в неравенствах для числовых последовательностей*). Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится, причём, начиная с некоторого номера, $x_n \geqslant b$ ($x_n \leqslant b$), где $b \in \mathbb{R}$. Тогда выполнено предельное неравенство

$$\lim_{n\to+\infty} x_n \geqslant b \quad (\lim_{n\to+\infty} x_n \leqslant b).$$

Замечание. Из строгого неравенства $x_n > b$, выполняемого начиная с некоторого номера, не следует, вообще говоря, строгость предельного неравенства (т. е. что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n > b$). В этом случае по-прежнему можно лишь утверждать, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \geqslant b$.

Пример 69. Например, $\dfrac{1}{n} > 0$, но $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. $\square$

Следствие 1. Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — сходящиеся последовательности и существует натуральный номер N такой, что $\forall n \geqslant N$ выполняется $x_n \leqslant y_n$ ($x_n < y_n$). Тогда

$$\lim_{n\to+\infty} x_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} y_n.$$

Следствие 2. Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. Если для любого натурального n верно, что $x_n \in [b, c]$, то $a \in [b, c]$.

Теорема 10 (*принцип двусторóнней ограниченности*).[1] Пусть две последовательности сходятся к общему пределу: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = a$. Если последовательность $\{z_n\}$ такова, что для всех натуральных n, начиная с некоторого номера, выполнено двойное ограничение $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$, то $\{z_n\}$ также сходится и

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = a.$$

[1] Имеется шуточная интерпретация данной теоремы, которую иногда называют "теоремой о двух милиционерах": «Если два представителя силовых структур x_n и y_n ведут задержанного z_n в отделение внутренних дел так, что z_n всё время находится между x_n и y_n, то z_n придёт туда же».

Пример 70. Найти предел последовательности

$$z_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + ... + \frac{n}{n^2+n}.$$

Решение. Оценим члены последовательности $\{z_n\}$ сверху и снизу, воспользовавшись тем, что самое большое слагаемое в сумме — первое, а самое маленькое — последнее:

$$z_n \geqslant n \cdot \frac{n}{n^2+n} = \frac{n^2}{n^2+n} = \frac{n}{n+1} = x_n,$$

$$z_n \leqslant n \cdot \frac{n}{n^2+1} = \frac{n^2}{n^2+1} = y_n.$$

Но поскольку $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 1$, то, согласно принципу двусторонней ограниченности, предел $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n$ также равен 1. □

И ещё одна теорема связана с сохранением знака членов сходящихся последовательностей.

Теорема 11 (*о сохранении знака*). Если $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \neq 0$, то существует номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что при всех $n \geqslant n_0$ знаки x_n и a совпадают.

4.3 Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности

Рассмотрим два вида числовых последовательностей, которые называются бесконечно большими и бесконечно малыми последовательностями.

Понятие бесконечно большóй последовательности. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если для любого действительного числа $M > 0$ найдётся такой натуральный номер $N = N(M)$ (зависящий от M), что для любого $n \in \mathbb{N}$, начиная с этого номера N, выполняется: $|x_n| > M$.[1]

Обозначение: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \infty$, или $x_n \to \infty$ при $n \to +\infty$.

Если, начиная с некоторого номера, все члены бесконечно большой последовательности положительны (отрицательны), то пишут $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ (соответственно, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$).

[1] Иными словами, последовательность называют бесконечно большой в тех случаях, когда она имеет бесконечный предел ($+\infty$, $-\infty$ или ∞).

Пример 71. Последовательность $x_n = (-1)^n n$ – бесконечно большая, так как $|(-1)^n n| = n > M$, начиная с $N = [M] + 1$. $\square$

Теорема 1. Всякая бесконечно большая последовательность является неограниченной и расходящейся. Однако не любая неограниченная последовательность является бесконечно большой.

Пример 72. Например, последовательность $\{0, 1, 0, 2, 0, 3, \dots\}$ неограниченная, но не бесконечно большая. $\square$

Понятие бесконе́чно ма́лой последовательности. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно малой*, если для любого положительного действительного числа ε найдётся натуральный номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что для всех натуральных чисел $n \geqslant N$ будет выполнено: $|x_n| < \varepsilon$. Иными словами, последовательность называют бесконечно малой в тех случаях, когда она сходится к нулю.

Понятие бесконечно малой последовательности позволяет сформулировать ещё одно (эквивалентное двум предыдущим) определение сходящейся последовательности действительных чисел.

Опр. 3. Последовательность $\{x_n\}$ называется *сходящейся*, если найдётся действительное число a такое, что последовательность $\{x_n - a\}$ является бесконечно малой.

Отсюда следует утверждение.

Теорема 2 (*о специальном представлении сходящейся последовательности*). Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ имела предел a, необходимо и достаточно, чтобы её можно было представить в виде

$$x_n = a + \alpha_n,$$

где $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность.

Следующие теоремы отражают основные *свойства бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей* и их взаимосвязь.

Теорема 3. Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — бесконечно малые последовательности. Тогда последовательность $\{ax_n + by_n\}$, где a, b

— произвольные действительные числа, также является бесконечно малой.

Теорема 4. Пусть $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность, $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность. Тогда последовательность $\{\alpha_n \cdot x_n\}$ является бесконечно малой.

Теорема 5. Бесконечно малая последовательность является ограниченной.

Теорема 6. Произведение двух (любого конечного числа) бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Теорема 7. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно большая последовательность. Тогда, начиная с некоторого номера n, определено частное $\{1/x_n\}$, являющееся бесконечно малой последовательностью.

Теорема 8. Если последовательность $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая и $\alpha_n \neq 0$ для любого натурального номера n, то последовательность $\{1/\alpha_n\}$ является бесконечно большой.

Теорема 9. Если $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \infty$ и, начиная с некоторого номера, $|x_n| \geqslant |y_n|$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \infty$.

4.4 Неэлементарные функции, определяемые как предел последовательности

Одним из способов задания функций является их определение с помощью пределов, зависящих от дополнительного параметра x, который у определяемой функции выступает в качестве переменной.

Пример 73. Построить график функции $y = \lim\limits_{n\to+\infty} (\sin x)^{2n}$.

Решение. Упростим функцию, записав её стандартным способом – без использования предела. Поскольку при $0 \leqslant |\sin x| < 1$ имеем $y(x) = 0$, а при $|\sin x| = 1$ получаем $y(x) = 1$, то

$$y(x) = \begin{cases} 1, \text{ при } x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

График постройте самостоятельно. □

4.5 Задачи для самостоятельного решения

Задача-шутка для 5-го класса: «В двух кошельках лежат две монеты, причём в одном кошельке монет вдвое больше, чем в другом. Как такое может быть?»

Задачи на нахождение формул общего члена последовательностей:

№172. Найти формулу общего члена последовательности

$$\frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{3}{6},\ \frac{6}{7},\ldots$$

№173. Найти формулу общего члена последовательности

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{n+2}{n} \cdot a_n.$$

№174. Последовательность чисел $\{a_1, a_2, a_3, ...\}$ устроена следующим образом: $a_1 = 1$, каждое последующее число равно удвоенной сумме предыдущих чисел, т. е. $a_2 = 2a_1$, $a_3 = 2(a_1 + a_2)$ и т. д. Найти формулу общего члена данной последовательности.

№175. Найти формулу общего члена последовательности $1,\ 0,\ -3,\ 0,\ 5,\ 0,\ -7,\ 0, ...$

Сформулировать определения:

№176. [6, № 45] Сформулировать определения бесконечных пределов:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

№177. Сформулировать утверждения:

а) Число A не является пределом последовательности $\{a_n\}$.

б) Последовательность $\{a_n\}$ не имеет предела.

в) Последовательность $\{a_n\}$ не является бесконечно большой.

№178. Используя логическую символику, записать высказывание «последовательность $\{x_n\}$ ограничена», а также его отрицание.

Задачи на ограниченность (неограниченность) последовательностей:

№179. Доказать, пользуясь определением и методом «от противного», что последовательность с общим членом $x_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, не является ограниченной.

№180. Показать, что последовательность с общим членом

$$а)\ x_n = \frac{n-2}{n+1}; \quad б)\ x_n = \operatorname{arcctg}(n^2+n-1)$$

является ограниченной ($n \in \mathbb{N}$).

Доказать ограниченность последовательностей ($n \in \mathbb{N}$):

№181. [?, с. 7] $x_n = \dfrac{(-1)^n n + 10}{\sqrt{n^2+1}}$;

№182. [?, с. 7] $x_n = \dfrac{n + (-1)^n}{3n-1}$;

№183. [?, с. 8] $x_n = \sqrt{n^2+1} - n$;

№184. [?, с. 8] $x_n = \dfrac{2^n+1}{3^n-2}$.

Доказать неограниченность последовательностей ($n \in \mathbb{N}$):

№185. [?, с. 8] $x_n = \dfrac{n^3}{n^2+1}$;

№186. [?, с. 9] $x_n = \sqrt{n^4+n^3+1} - \sqrt{n^4-n^3+1}$.

№187. [6, № 44] Показать, что последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = n^{(-1)^n}$, не ограничена, однако не является бесконечно большой при $n \to \infty$.

№188. Используя неравенство Коши и тот факт, что $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$ ($n \in \mathbb{N}$), доказать ограниченность последовательности

$$x_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{1}{2^n}\right).$$

№189. Применяя предварительное логарифмирование, доказать ограниченность последовательности

$$x_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{1}{2^n}\right).$$

Доказать, что последовательность расходится:

№190. $x_n = (-1)^n$;

№191. $x_n = \sin n$.

Решить задачи на доказательство, используя определение предела последовательности:

№192. [6, № 41] Пусть $x_n = \dfrac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, определив для каждого $\varepsilon > 0$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что $|x_n - 1| < \varepsilon$, если $n \geq N$.

№193. [**?**, с. 12] Используя определение предела последовательности (на языке «$\varepsilon - N$»), доказать:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

№194. [**?**, с. 14] Используя определение предела последовательности (на языке «$\varepsilon - N$»), доказать:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4} = \frac{1}{3}.$$

№195. [6, № 42(а,в)] Доказать, что $\{x_n\}$ есть бесконечно малая последовательность, указав для $\forall \varepsilon > 0$ натуральный номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что $|x_n| < \varepsilon$ при $n \geq N$, если

$$а)\ x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}; \quad б)\ x_n = \frac{1}{n!}.$$

№196. [6, № 43(а,б)] Доказать, что последовательность $\{x_n\}$, где

$$а)\ x_n = (-1)^n n; \quad б)\ x_n = 2^{\sqrt{n}},$$

имеет бесконечный предел при $n \to \infty$, определив для произвольного $E > 0$ натуральный номер $N = N(E)$ такой, что $|x_n| > E$ при $n \geq N$.

№197. [6, № 42(б,г)] Доказать, что $\{x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, есть бесконечно малая последовательность, указав для произвольно выбранного $\varepsilon > 0$ натуральный номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что

$|x_n| < \varepsilon$ при $n \geq N$, если

$$а)\ x_n = \frac{2n}{n^3+1}; \quad б)\ x_n = (-1)^n \cdot 0,999^n.$$

№198. [6, № 43(в)] Доказать, что последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = \lg(\lg n)$, $n \geq 2$, является бесконечно большой, определив для произвольного $E > 0$ натуральный номер $N = N(E)$ такой, что $|x_n| > E$ при $n \geq N$.

Доказать, что предел равен заданному числу, используя принцип двусторонней ограниченности и другие приёмы:

№199. [6, №58] $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{a^n} = 0 \quad (a > 1)$;

№200. [6, №59] $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0$;

№201. [6, №68] $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2n-1}{2n}\right) = 0.$

Задачи на неэлементарные функции, определяемые пределами:

№202. Построить график функции

$$y = \lim_{n\to+\infty} \left((x-1)\operatorname{arctg}(x^n)\right).$$

№203. Какая известная в математическом анализе функция (не относящаяся к элементарным) задаётся уравнением

$$y = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} (\operatorname{arctg} nx)}{\arcsin x + \arccos x}\ ?$$

Разные задачи на последовательности:

№204. Является ли последовательность $x_n = n \cdot \sin\dfrac{\pi n}{2}$ бесконечно большой?

№205. [6, №94] Доказать, что сходящаяся числовая последовательность достигает либо своей верхней грани, либо своей нижней грани, либо той и другой. Построить примеры последовательностей всех трёх типов.

№206. [6, №95] Доказать, что числовая последовательность $\{x_n\}$ $(n = 1, 2, ...)$, стремящаяся к $+\infty$, обязательно достигает своей точной нижней грани.

№207. [6, № 127] Пусть последовательность $\{x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится, а последовательность $\{y_n\}$ – расходится. Что можно утверждать о сходимости последовательностей

$$\text{а) } \{x_n + y_n\}; \quad \text{б) } \{x_n y_n\}\,?$$

№208. [6, № 129] Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ и $\{y_n\}$ – произвольная последовательность. Можно ли утверждать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$? Привести различные примеры.

№209. [6, № 128] Пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, расходятся. Можно ли утверждать, что последовательности

$$\text{а) } \{x_n + y_n\}; \quad \text{б) } \{x_n y_n\}$$

также расходятся? Привести примеры.

№210. [6, № 130] Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = 0$. Следует ли отсюда, что либо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, либо $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$? Рассмотреть пример:

$$\{x_n\} = \frac{1 + (-1)^n}{2},\ \{y_n\} = \frac{1 - (-1)^n}{2},\ n \in \mathbb{N}.$$

4.6 Ответы и решения

172. Подбором находим $x_n = \dfrac{n+(-1)^{n+1}}{n+2}$.

173. Выпишем первые n членов этой последовательности:

$$a_1 = 2,\ a_2 = \frac{3}{1}\cdot a_1,\ a_3 = \frac{4}{2}\cdot a_2,\ a_4 = \frac{5}{3}\cdot a_3, ...,\ a_n = \frac{n+1}{n-1}\cdot a_{n-1}.$$

Перемножим эти равенства:

$$a_1\cdot a_2\cdot ...\cdot a_n = 2\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot ...\cdot\frac{n-1}{n-3}\cdot\frac{n}{n-2}\cdot\frac{n+1}{n-1}\cdot a_1\cdot a_2\cdot ...\cdot a_{n-1},$$

откуда после сокращения получаем формулу n-го члена: $a_n = n(n+1)$.

174. Имеем $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ и при $n > 2$ справедливы равенства:

$$a_n = 2(a_1+...+a_{n-2}+a_{n-1}) = 2(a_1+...+a_{n-2})+2a_{n-1} = 3a_{n-1},$$

отсюда находим $a_n = 2\cdot 3^{n-2}$ $(n > 2)$.

175. Из условия запишем: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -3$, $x_4 = 0$, $x_5 = 5$, $x_6 = 0$,... То есть для нечётных $n = 2k-1$ имеем $x_{2k-1} = (2k-1)(-1)^{k-1} = m(-1)^{\frac{m-1}{2}} = m\cos\frac{\pi(m-1)}{2}$. Для чётных $n = 2k$ получаем $x_{2k} = 0$, что можно записать также как $x_m = m\cos\frac{\pi(m-1)}{2}$. Таким образом, общий член последовательности можно представить при всех $n \in \mathbb{N}$ в виде $x_n = n\cos\frac{\pi(n-1)}{2}$.

176. а) $\forall E > 0 \quad \exists N(E):\ \forall n \geq N(E) \quad |x_n| > E$;

б) $\forall E < 0 \quad \exists N(E):\ \forall n \geq N(E) \quad x_n < E$;

в) $\forall E > 0 \quad \exists N(E):\ \forall n \geq N(E) \quad x_n > E$.

177. а) $\exists \varepsilon > 0:\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n_0 \geqslant N:\ |a_{n_0} - A| \geq \varepsilon$.

б) Какое бы число A ни взять,

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n_0 > N : |a_{n_0} - A| \geq \varepsilon.$$

в) $\exists E > 0:\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geq n_0:\ |a_n| \leq E$.

178. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена $\overset{def}{\Leftrightarrow} \exists M > 0$: $\forall n \in \mathbb{N}\ |x_n| \leqslant M$. Последовательность неограничена $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\forall M > 0$: $\exists n \in \mathbb{N}\ |x_n| > M$.

179. Предположим, от противного, что данная последовательность является ограниченной сверху, т. е. существует такое число M, что для любого натурального n справедливо неравенство $n^2 \leq M$. Выберем натуральное число $n_0 > \sqrt{M}$, например, положив $n_0 = [\sqrt{M}] + 1$. Тогда для этого номера имеем $n_0^2 = ([\sqrt{M}] + 1)^2 > (\sqrt{M})^2 = M$. Таким образом, получено противоречие с предположением, что для любого n справедливо $n^2 \leq M$. Следовательно, предположение было неверным, и данная последовательность не является ограниченной сверху, а значит, и ограниченной.

180. а) Во-первых, при любом натуральном n имеем:

$$x_n = \frac{(n+1)-3}{n+1} = 1 - \frac{3}{n+1} < 1,$$

т. е. последовательность ограничена сверху. Во-вторых, так как разность последующего и предыдущего членов

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n-1}{n+2} - \frac{n-2}{n+1} = \frac{3}{(n+1)(n+2)} > 0$$

при всех $n \in \mathbb{N}$, то последовательность возрастает, а значит, она ограничена снизу своим первым членом $x_1 = -\frac{1}{2}$. Итак, поскольку последовательность ограничена и сверху, и снизу $-\frac{1}{2} \leq x_n < 1$, то она по определению является ограниченной.

б) Утверждение следует из ограниченности арккотангенса: $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$, $x \in \mathbb{R}$.

181. Поскольку $|(-1)^n n + 10| \leqslant |(-1)^n| n + 10 = n + 10$, а $\sqrt{n^2+1} > n$, то доказательство следует из цепочки оценок:

$$|x_n| = \left|\frac{(-1)^n n + 10}{\sqrt{n^2+1}}\right| \leqslant \frac{n+10}{n} = 1 + \frac{10}{n} \leqslant 11.$$

182. Имеем $|x_n| = \left|\frac{n + (-1)^n}{3n-1}\right| \leqslant \frac{n+1}{3n-1}$. Преобразуем по-

следнюю дробь:

$$\frac{n+1}{3n-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3n+3}{3n-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3n-1)+4}{3n-1} = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{4}{3n-1}\right).$$

Так как $3n-1 \geqslant 2$, то окончательно получаем ограниченность

$$|x_n| \leqslant \left|\frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{4}{3n-1}\right)\right| \leqslant \frac{1}{3}(1+2) = 1.$$

183. Имеем

$$|x_n| = \sqrt{n^2+1} - n = \frac{(\sqrt{n^2+1} - n)(\sqrt{n^2+1} + n)}{\sqrt{n^2+1} + n} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{1}{n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1\right)} \leqslant \frac{1}{2n} \leqslant \frac{1}{2}.$$

184. Заметим, что $x_n = \dfrac{2^n+1}{3^n-2} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Покажем, что $x_{n+1} < x_n$:

$$x_{n+1} = \frac{2^{n+1}+1}{3^{n+1}-2} = \frac{(2^{n+1}+2)-1}{(3^{n+1}-6)+4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{(2^n+1) - \frac{1}{2}}{(3^n-2) + \frac{4}{3}} <$$

$$< \frac{2}{3} \cdot \frac{2^n+1}{(3^n-2) + \frac{4}{3}} < \frac{2}{3} \cdot \frac{2^n+1}{3^n-2} = \frac{2}{3} x_n.$$

Итак, $x_{n+1} < \dfrac{2}{3} x_n < x_n$. Следовательно,

$$x_{n+1} < x_n < x_{n-1} < ... < x_2 < x_1 = 3.$$

185. Имеем

$$x_n = \frac{n^3}{n^2+1} = \frac{n^3}{n^2(1 + \frac{1}{n^2})} = \frac{n}{1 + \frac{1}{n^2}} > \frac{n}{2}.$$

Покажем, что последовательность $\{\frac{n}{2}\}$ расходится к $+\infty$. В самом деле, зафиксируем произвольно большое M, тогда решая неравенство $\frac{n}{2} > M$, находим из него $n > 2M$. В качестве n

можно взять, например, наименьшее натуральное число, превосходящее $2M$, т. е. $n = [2M] + 1$. По теореме сравнения последовательность $\{x_n\}$, мажорирующая расходящуюся последовательность, также расходится.

186. Умножая и деля на сопряжённое выражение, получаем

$$x_n = \sqrt{n^4 + n^3 + 1} - \sqrt{n^4 - n^3 + 1} =$$

$$= \frac{2n^3}{\sqrt{n^4 + n^3 + 1} + \sqrt{n^4 - n^3 + 1}} =$$

$$= \frac{2n^3}{n^2\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^4}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^4}}\right)} =$$

$$= \frac{2n}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^4}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^4}}}.$$

Поскольку $\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^4}} < \sqrt{3}$, $\sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^4}} < \sqrt{3}$, то приходим к оценке $|x_n| > \dfrac{2n}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} = \dfrac{n}{\sqrt{3}}$. Для произвольно большого положительного M всегда можно выбрать натуральное n так, чтобы $n > \sqrt{3}M$, для этого достаточно взять $n = [\sqrt{3}M] + 1$. Для такого n будет выполнено $\dfrac{n}{\sqrt{3}} > M$ и, следовательно, $|x_n| > M$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ не ограничена.

187. Если бы $\{x_n\}$ была ограничена, то любая её подпоследовательность также была бы ограничена. Однако подпоследовательность с чётными номерами $\{x_{2k}\}$, где $x_{2k} = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, является бесконечно большой. Следовательно, $\{x_n\}$ – не ограничена. С другой стороны, $\{x_n\}$ не является бесконечно большой, так как существует подпоследовательность $\{x_{2k+1}\}$, где $x_{2k+1} = \dfrac{1}{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, сходящаяся к нулю, что противоречит определению бесконечно большой последовательности.

188. Ограниченность снизу очевидна. Докажем ограниченность сверху, т. е. существование константы M такой, чтобы при всех $n \in \mathbb{N}$ выполнялось $x_n \leqslant M$.

Воспользуемся неравенством Коши:

$$\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^n}\right)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{2^n}\right)}{n}.$$

Тогда имеем

$$x_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\leqslant\left(\frac{n+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)}{n}\right)^n.$$

Поскольку $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1$, то

$$x_n<\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e.$$

189. Ограниченность $\{x_n\}$ снизу очевидна, а ограниченность сверху следует из неравенств:

$$\ln x_n=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<$$

$$<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=1,$$

откуда $x_n<e$.

190. От противного: пусть это не так, и существует действительное число a такое, что $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$. Тогда последовательности $\{x_n-a\}$ и $\{x_{n+1}-a\}$ являются бесконечно малыми. Значит, бесконечно малой является и их разность $\{x_n-x_{n+1}\}$. Но $|x_n-x_{n+1}|=2$ для любого натурального n. Мы пришли к противоречию. Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ расходится.

191. От противного. Пусть $\exists\lim\limits_{n\to+\infty}\sin n=a$, но тогда и $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin(n+2)=a$, следовательно,

$$\lim_{n\to+\infty}(\sin(n+2)-\sin n)=0\quad\Leftrightarrow\quad\lim_{n\to+\infty}2\sin 1\cos(n+1)=0.$$

Из формулы $\cos(n+1) = \cos n \cdot \cos 1 - \sin n \cdot \sin 1$ имеем:

$$\sin n = \frac{1}{\sin 1}(\cos n \cdot \cos 1 - \cos(n+1)) \ \to 0,$$

так как $\cos n \to 0$ и $\cos(n+1) \to 0$. Итак, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin n = 0$. Получили, что одновременно $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin n = \lim\limits_{n\to+\infty} \cos n = 0$, что противоречит $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$. Значит, последовательность $\{\sin n\}$ расходится.

192. По определению предела, для любого $\varepsilon > 0$ имеем:

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

при $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. В качестве $N(\varepsilon)$ можно, например, взять $[\frac{1}{\varepsilon}]$.

193. Имеем

$$\left|x_n - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n - 2n - 1}{2(2n+1)}\right| = \frac{1}{2(2n+1)}.$$

Решая неравенство $\dfrac{1}{2(2n+1)} < \varepsilon$, находим $n > \dfrac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}$. Возьмём $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}\right] + 1$, тогда при всех $n \geqslant N(\varepsilon)$ будет справедливо неравенство $\left|x_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$, т. е. определение выполняется и последовательность $\{x_n\}$ сходится к $\frac{1}{2}$.

194. Рассмотрим

$$\left|x_n - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{-5n + 10}{3(3n^2 + 2n - 4)}\right|.$$

При достаточно больших n имеем

$$\left|\frac{-5n + 10}{3(3n^2 + 2n - 4)}\right| = \frac{5n - 10}{3(3n^2 + 2n - 4)} < \frac{5n}{3(3n^2 + 2n - 4)}.$$

Далее, так как при $n > 2$ имеем $3n^2 + 2n - 4 > 3n^2 - 4 = 2n^2 + (n^2 - 4) > 2n^2$, то

$$\frac{5n}{3(3n^2 + 2n - 4)} < \frac{5n}{3 \cdot 2n^2} = \frac{5}{6n} < \frac{1}{n}.$$

Получили, что $\left|x_n - \frac{1}{3}\right| < \frac{1}{n} < \varepsilon$, как только $n \geqslant N(\varepsilon) = [1/\varepsilon] + 1$.

195. а) Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим выражение $|x_n| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \frac{1}{n}$. Составив неравенство $\frac{1}{n} < \varepsilon$ и решив его относительно n, находим, что оно верно при $n > 1/\varepsilon$, т. е. начиная с номера $N(\varepsilon) = [1/\varepsilon] + 1$.

б) Составим для произвольного $\varepsilon > 0$ неравенство $|x_n| = \left|\frac{1}{n!}\right| = \frac{1}{n!} < \varepsilon$ и воспользуемся оценкой

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \geq \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n-1} = 2^{n-1},\ n \in \mathbb{N},$$

тогда $|x_n| = \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$, откуда $n > 1 + \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$. В качестве $N(\varepsilon)$ можно взять $2 + [\log_2(1/\varepsilon)]$.

196. а) Для произвольно выбранного $E > 0$ составим неравенство $|x_n| = |(-1)^n n| = n > E$. В качестве $N(E)$ можно взять, например, $[E] + 1$.

б) Поступая аналогично пункту а), для произвольного $E > 0$ имеем $|x_n| = |2^{\sqrt{n}}| = 2^{\sqrt{n}} > E$, откуда находим $n > \log_2^2 E$. В качестве $N(E)$ можно взять $[\log_2^2 E] + 1$.

197. Доказательство. а) Для произвольного $\varepsilon > 0$ имеем

$$\left|\frac{2n}{n^3 + 1}\right| < \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2} < \varepsilon,$$

откуда $n > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$, т. е. $N(\varepsilon) = \left[\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\right] + 1$.

б) Для произвольного $\varepsilon > 0$ имеем:

$$|(-1)^n \cdot 0,999^n| = 0,999^n < \varepsilon,\ \text{откуда } n > \log_{0,999} \varepsilon,$$

т. е. $N(\varepsilon) = [\log_{0,999} \varepsilon] + 1$.

198. Доказательство. При $n > 10$ имеем $|x_n| = |\lg(\lg n)| = \lg(\lg n)$, тогда

$$|x_n| = \lg(\lg n) > E$$

при $n > 10^{10^E}$. В качестве $N(E)$ можно взять, например, $[10^{10^E}] + 1$.

199. Достаточно показать, что $\forall \varepsilon > 0$ найдётся номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что при всех $n > N$ верно неравенство $|\frac{n}{a^n}| < \varepsilon$. Воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$0 < \frac{n}{a^n} = \frac{n}{(1+(a-1))^n} =$$

$$= \frac{n}{1 + n(a-1) + \frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2 + ... + (a-1)^n} <$$

$$< \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2} = \frac{2}{(n-1)(a-1)^2} < \varepsilon,$$

откуда уже несложно найти номер $n_0(\varepsilon) > 1$, начиная с которого $0 < \frac{n}{a^n} < \varepsilon$, и воспользоваться принципом двусторонней ограниченности.

200. Имеем:

$$0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \underbrace{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot ... \cdot \frac{2}{n}}_{n-2} \leq 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Взяв любое $\varepsilon > 0$ из неравенства $\frac{9}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n < \varepsilon$ можно найти искомый номер n_0.

201. Доказательство. Воспользуемся неравенством (доказывается по индукции):

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot ... \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Имеем $0 < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot ... \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$ как только $n > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right)$, откуда следует равенство нулю предела.

202. При $x > 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} (x-1)\operatorname{arctg}(x^n) = \frac{\pi}{2}(x-1)$;
при $x = 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} (x-1)\operatorname{arctg}(x^n) = 0$;
при $|x| < 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} (x-1)\operatorname{arctg}(x^n) = 0$;
при $x \leqslant -1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} (x-1)\operatorname{arctg}(x^n)$ не существует.

203. Так как $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, то рассматривая случаи $x > 0$, $x < 0$, $x = 0$ и вычисляя в каждом из них предел, получаем что эта функция $y = \operatorname{sgn} x$ (сигнум, знак числа).

204. Нет, среди её членов всегда будут встречаться равные нулю.

205. Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.

1) Если при всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $x_n < a$, то у $\{x_n\}$ обязательно есть наименьший элемент, который будет точной нижней гранью.

2) Если при всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $x_n > a$, то у $\{x_n\}$ обязательно есть наибольший элемент, который будет точной верхней гранью.

3) Если $\{x_n\}$ содержит элементы как ме́ньшие a, так и бо́льшие a или равные a, то во всех этих случаях последовательность имеет как наименьший, так и наибольший элементы, т. е. достигает своих точной нижней и верхней граней.

Примеры.

1) $x_n = \dfrac{n-1}{n} = 1 - \dfrac{1}{n}$. Эта последовательность с увеличением n увеличивает свои значения (возрастает), поэтому $x_1 = 0 = \inf\{x_n\}$;

2) $x_n = \dfrac{1}{n}$ с увеличением n уменьшает свои значения (убывает), поэтому $x_1 = 1 = \sup\{x_n\}$;

3) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ знакочередующаяся, с увеличением n её значения по модулю уменьшаются, поэтому $x_1 = -1 = \inf\{x_n\}$, $x_2 = \dfrac{1}{2} = \sup\{x_n\}$.

206. Пусть $x_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$ и x_l – любой элемент последовательности. Возьмём произвольное число $A > x_l$. Так как $x_n \to +\infty$, то существует такой натуральный номер $N(A)$, что при $n > N(A)$ справедливо $x_n > A$. Обозначим $x_{n_0} = \min\{x_1, x_2, ..., x_N\}$. Тогда очевидно, что $x_{n_0} = \inf\{x_n\}$.

207. а) Последовательность $\{x_n + y_n\}$ – расходится. Действительно, если бы она сходилась, то сходилась бы и разность последовательностей $\{x_n + y_n\}$ и $\{x_n\}$. Но это невозможно, так как $\{(x_n + y_n) - x_n\} = \{y_n\}$, а $\{y_n\}$ – расходится.

б) Последовательность $\{x_n y_n\}$ может как сходиться, так и расходиться. Например, $\{x_n\} = \dfrac{1}{n}$ – сходится, $\{y_n\} = (-1)^n$ – расходится, $\{x_n y_n\} = \dfrac{(-1)^n}{n}$ – сходится. Или $\{x_n\} = \dfrac{1}{n}$ – сходится, $\{y_n\} = (-1)^n n$ – расходится, $\{x_n y_n\} = (-1)^n$ – расходится.

208. Если $\{y_n\}$ имеет конечный предел, то да. Например, $\{x_n\} = 1/n$, $\{y_n\} = 2 + 1/n$.

Если $\{y_n\} \to \pm\infty$, то $\{x_n y_n\}$ может как сходиться, так и расходиться. Например, $\{x_n y_n\}$ сходится для $\{x_n\} = \frac{1}{n^2}$, $\{y_n\} = n$ и расходится для $\{x_n\} = \frac{1}{n}$, $\{y_n\} = n^2$.

Если $\{y_n\}$ не имеет предела, то $\{x_n y_n\}$ может и сходиться, и расходиться. Например, она сходится при $\{x_n\} = \frac{1}{n}$, $\{y_n\} = (-1)^n$, и расходится при $\{x_n\} = \frac{1}{n}$, $\{y_n\} = (-1)^n n$.

209. Нет. а) $\{x_n\} = n$, $\{y_n\} = n^2$ расходятся и $\{x_n + y_n\}$ – расходится; $\{x_n\} = n$, $\{y_n\} = 1 - n$ расходятся, а $\{x_n + y_n\} \equiv 1$ – сходится; б) $\{x_n\} = n$, $\{y_n\} = n^3$ расходятся и $\{x_n y_n\}$ – расходится; $\{x_n\} = (-1)^n$, $\{y_n\} = 2(-1)^n$ расходятся, а $\{x_n y_n\} \equiv 2$ – сходится.

210. Нет, см. предложенный пример.

5 СЕМИНАР: Приёмы и методы вычисления пределов последовательностей

«Если вы хотите участвовать в большой жизни, то наполняйте свою голову математикой, пока есть к тому возможность. Она окажет вам потом огромную помощь во всей вашей работе».

М.И. Калинин (1875–1946) – русский революционер, советский государственный и партийный деятель.

Домашнее задание: 211, 212, 216, 219–229, 232, 233, 237, 238, 240–242, 245, 248, 251, 255, 257–259, 264, 273, 276, 277, 279, 282–284, 287, 290(в).

Ниже мы рассмотрим различные приёмы вычисления пределов числовых последовательностей, многие из которых понадобятся в дальнейшем при вычислении пределов функций. Некоторые из этих приёмов мы уже использовали на предыдущем семинаре, однако для систематизации будущих знаний полезно привести здесь основные типы задач на предел последовательности и методы их решения.

5.1 Задачи на доказательство, решаемые с использованием определения предела

В этих задачах непосредственно используется определение предела, напомним его. Число $a \in \mathbb{R}$ называется *пределом* последовательности действительных чисел $\{x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, если для любого (сколь угодно малого) положительного числа ε найдётся номер $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что при всех $n \geqslant N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Задачи такого рода мы решали на предыдущем занятии. Рассмотрим ещё один пример.

Пример 74. Пусть $x_n = \dfrac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 1$, определив для каждого $\varepsilon > 0$ номер $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что при

всех $n \geqslant N$ выполняется неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$.

Решение. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выпишем отклонение (по модулю) x_n от предельного значения, равного 1:

$$|x_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{-1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1}.$$

Найдём, начиная с какого номера будет выполняться неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$, т. е. $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$. Решив неравенство, находим $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$. В качестве $N(\varepsilon)$ можно взять, например, наименьшее натуральное число, превосходящее $\dfrac{1}{\varepsilon} - 1$, т. е. $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$. $\square$

Проверь свои знания:

№211. Используя определение предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n^2 - n + 2}{n^2 + 3n - 1} = 2$.

№212. [6, № 91] Доказать, что если

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = a, \quad \text{то} \quad \lim_{n \to +\infty} |x_n| = |a|.$$

5.2 Пределы вида $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{P_k(n)}{Q_m(n)}$, где $P_k(n)$, $Q_m(n)$ – алгебраические многочлены, а также некоторые другие неопределённости типа $\frac{\infty}{\infty}$

При решении большинства задач на вычисление пределов числовых последовательностей нередко возникают сложности, связанные с так называемыми «неопределённостями» разных видов. Если, к примеру, вычисляется предел от отношения двух последовательностей $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$, и при этом выясняется, что как числитель дроби, так и её знаменатель одновременно стремятся к бесконечности (с любым знаком). В этих случаях принято говорить, что имеется неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$. Имеются и другие виды неопределённостей, с которыми вы также познакомитесь и научитесь их раскрывать. Наличие той или иной неопределённости в задаче, вообще говоря, не означает, что предела не существует. В таких ситуациях обычно рекомендуют различные преобразования под знаком предела, поз-

воляющие «раскрыть неопределённость», т. е. выяснить, существует ли данный предел, и если он существует, то чему равен.

Рассмотрим, как раскрываются простейшие неопределённости в случаях, когда необходимо вычислить предел отношения двух алгебаических многочленов. Пусть даны многочлены

$$P_k(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + ... + a_1 n + a_0$$

$$\text{и} \quad Q_m(n) = b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + ... + b_1 n + b_0.$$

Их отношение порождает неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$, раскрыть которую помогает вынесение за скобку n в наибольшей степени как в числителе, так и в знаменателе дроби. После сокращения на наибольшую возможную степень n неопределённость пропадает и предел вычисляется.

Пример 75. Найти предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2+n+1}{3n^2-1}$.

Решение. Имеем $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2+n+1}{3n^2-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2(2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^2(3-\frac{1}{n^2})} =$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{3}. \square$$

В следующем примере при вычислении предела отношения двух показательных выражений также приходится раскрывать неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример 76. Найти предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$.

Решение. Разделим числитель и знаменательно дроби на 3^n:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-\frac{2}{3})^n+1}{-2(-\frac{2}{3})^n+3} = \frac{1}{3},$$

так как $(-\frac{2}{3})^n \to 0$. $\square$

Вычислить пределы, раскрыв неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$:

№213. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7n+1}{5n^3-3n+2}$;

№214. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-3n^4+10n^2-1}{n^2+23n-9}$;

№215. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(5-n)^2+(5+n)^2}{(5-n)^2-(5+n)^2}$;

№216. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{12n+5}{\sqrt[3]{27n^3+6n^2+8}}$;

№217. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+3n\sqrt{n}-2}{5n^2-7\sqrt[3]{n}+1}$;

№218. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{2n+1}+3^{n+2}}{4^{n+2}+5}$;

№219. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-6)^n-5^{n+1}}{5^n-(-6)^{n+1}}$.

5.3 Сведение к известным пределам

Многие пределы вычисляются сведением к более известным пределам. Приведём такие пределы (их значения стоит запомнить). Пусть $x_n\to 0,\ x_n\neq 0\ (n\in\mathbb{N})$, тогда

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin x_n}{x_n}=1\ \text{ (1-й замечательный предел),}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,\quad \lim_{n\to+\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}=e$$

(2-й замечательный предел),[1]

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}\right)=e,$$

$$\lim_{n\to+\infty}a^n=0,\ \text{ если } |a|<1,$$

$$\lim_{n\to+\infty}a^n=\infty,\ \text{если } |a|>1,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1,\quad \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=1\quad (a>0),$$

[1] Число e, играющее в математическом анализе особую роль, было введено в 1736 г. Леонардом Эйлером именно как предел возрастающей и ограниченной сверху последовательности:

$$e\overset{def}{=}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n\approx 2,718281828459045.$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^k}{a^n}=0\quad(a>1,\ k>0)$$

(это означает, что при $n\to+\infty$ степенна́я функция n^k растёт медленнее показательной функции a^n),

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log_a n}{n^k}=0\quad(a>1,\ k>0)$$

(т. е. при $n\to+\infty$ логарифмическая функция $\log_a n$ растёт медленнее степенно́й n^k) и др.

В этом пункте предлагается доказать некоторые из приведённых выше, а также другие известные пределы числовых последовательностей.

Доказать известные пределы:

№220. [6, № 60] Доказать, что при $a>1$, $k>0$ $(a,k\in\mathbb{R})$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^k}{a^n}=0.$$

№221. [6, № 64] Доказать, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\log_a n}{n}=0\ \ (a>1)$.

№222. [6, № 61] Доказать, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0\ \ (a>1)$.[1]

№223. [6, № 63] Доказать, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=1\ \ (a>0)$.

Указание: воспользоваться представлением

$$a=(1+(\sqrt[n]{a}-1))^n$$

и разложением по биному Ньютона.

№224. [6, № 65] Доказать, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

№225. [6, № 66] Доказать, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.

Вычислить пределы последовательностей:

№226. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2\cdot\sin\dfrac{1}{3n^2}\right)$;

№227. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{3n}\right)^n$.

[1] Т. е. скорость роста факториала выше, чем у любой показательной функции.

5.4 Вычисление предела рекуррентно заданной последовательности

Рассмотрим неявный способ задания последовательности – с помощью *рекуррентного соотношения*. В этом случае задаётся один или несколько первых элементов последовательности, а остальные определяются по некоторому правилу, в котором $(n+1)$-й член определяется через один или несколько предыдущих. Например, может быть известен первый член x_1 последовательности и рекуррентная формула вида $x_{n+1} = f(x_n)$, т. е. $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$ и так далее.

Заметим, что при рекуррентном задании последовательностей при попытке выписать явно члены последовательности возникают громоздкие выкладки, так как для того чтобы найти элементы с больши́ми номерами, необходимо найти все предыдущие члены указанной последовательности. Например, для нахождения x_{500} надо найти все предыдущие 499 членов.

Пример 77. Числа Фибона́ччи f_n определяются рекуррентной формулой:

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \quad f_1 = f_2 = 1.$$

Существует явное представление этих чисел:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right). \square$$

Как вычислить предел сходящейся рекуррентной последовательности? Если последовательность задана рекуррентно, например, соотношением $x_{n+1} = f(x_n)$ и известно, что она сходится (к пределу a), то для вычисления a часто достаточно в рекуррентном соотношении перейти к пределу, устремив n к $+\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$. В пределе при условии непрерывности функции $f(x)$ получаем равенство $a = f(a)$, из которого находим искомое a.

С осторожностью используйте этот приём для вычисления предела, если не удалось предварительно доказать сходимость последовательности. Кроме того, встречаются ситуации, когда этот приём не работает.

Пример 78. Рассмотрим последовательность $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_n = \dfrac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}$. Легко проверить, что даже если доказать, что она сходится, то вычислить её предел предельным переходом в рекуррентном соотношении не удаётся. $\square$

Пример 79. Рассмотрим последовательность

$$S_n = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n.$$

Получим рекуррентное соотношение:

$$S_{n+1} = 1+2^1+2^2+...+2^n+2^{n+1} = 1+2(1+2^1+2^2+...+2^n) = 1+2S_n.$$

Обозначим предел последовательности $\{S_n\}$ через S. Поскольку при $n \to +\infty$ имеем $S_n \to S$, $S_{n+1} \to S$, то, переходя в рекуррентном равенстве $S_{n+1} = 1 + 2S_n$ к пределу, получим

$$S = 1 + 2S, \quad \text{откуда} \;\; S = -1.$$

Результат, очевидно, неправдоподобный, поскольку последовательность из положительных чисел не может сходиться к отрицательному числу. Причина полученного противоречия кроется в том, что мы попытались найти конечный предел у последовательности, которая на самом деле не является сходящейся. Она расходится к плюс бесконечности: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. Данный приём к ней не применим. $\square$

Для некоторых классов рекуррентно заданных последовательностей разработаны специальные методы решения.[1]

Проверь свои знания:

№228. Известно, что числовая последовательность $\{x_n\}$, заданная рекуррентной формулой $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right)$, $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$, при $n \to +\infty$ сходится к некоторому числу A. Найти это число.

№229. Существует ли конечный предел у числовой последовательности $\{a_n\}$, заданной рекуррентно:

$$a_1 = a_2 = 2, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{1}{a_n}?$$

[1] Селезнева С.Н. Основы дискретной математики. М.: МАКСПресс, 2010. Ч. 4.1–4.2, с. 47–52.

№230. Найти формулу общего члена последовательности, заданной соотношением $x_{n+1} = 2x_n + 1$, и доказать, что в зависимости от значения её первого члена она либо постоянна, либо стремится к бесконечности.

№231. Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентным соотношением: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = -x_n$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ Показать, что переход к пределу при $n \to +\infty$ для вычисления предела этой последовательности не применим. Объяснить, почему.

Зная, что пределы существуют, найти их, предварительно выведя рекуррентные формулы и переходя в них к пределам:

№232. $\lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{...+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ корней}};$

№233. $\lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{...\sqrt{3\sqrt{5}}}}}}}}_{2n \text{ корней}}.$

№234. Имеет ли решение уравнение

$$\sqrt{2+x\sqrt{2+x\sqrt{2+...}}} = 2\ ?$$

5.5 Замена переменной под знаком предела

Замена переменной – универсальный метод, иногда применяемый при вычислении пределов последовательностей.

Пример 80. Найти предел числовой последовательности

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}.$$

Решение. Сделаем рационализирующую подстановку $t = \sqrt[6]{1+\frac{1}{n}}$, тогда имеем

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}=\lim_{t\to1}\frac{t^2-1}{t^3-1}=\lim_{t\to1}\frac{(t-1)(t+1)}{(t-1)(t^2+t+1)}=\frac{2}{3}.\ \square$$

Пример 81. Найти предел числовой последовательности

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2\sqrt[n]{49}+\sqrt[n]{7}-3}{\sqrt[n]{49}-1}.$$

Решение. Поскольку $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{49}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{7}=1$, то имеем неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Обозначим $\sqrt[n]{7}=a$, тогда получим

$$\lim_{a\to1}\frac{2a^2+a-3}{a^2-1}=\lim_{a\to1}\frac{(a-1)(2a+3)}{(a-1)(a+1)}=\lim_{a\to1}\frac{2a+3}{a+1}=\frac{5}{2}.\ \square$$

Проверь свои знания:

№235. Найти предел последовательности

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x_n}-1}{\sqrt[3]{x_n}-1},$$

если известно, что $x_n\to1$.

5.6 Использование формул сокращённого умножения

«Мгновение осознания своей бесталанности есть вспышка гениальности».

Станислав Ежи Лец, польский поэт, философ, сатирик и один из величайших афористов XX века.

При вычислении пределов последовательностей могут привлекаться формулы сокращённого умножения.

Пример 82. [6, № 50] Найти предел последовательности

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+a+a^2+...+a^n}{1+b+b^2+...+b^n}\qquad(|a|<1,\ |b|<1).$$

Решение. Воспользуемся тем, что

$$1-a^{n+1}=(1-a)(1+a+a^2+...+a^n),$$
$$1-b^{n+1}=(1-b)(1+b+b^2+...+b^n).$$

Тогда, домножая и деля дробь на $(1-a)$ и $(1-b)$, получаем

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(1-a)(1-b)(1+a+a^2+...+a^n)}{(1-a)(1-b)(1+b+b^2+...+b^n)}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{(1-a^{n+1})(1-b)}{(1-b^{n+1})(1-a)}=\frac{1-b}{1-a}.\ \square$$

5.7 Вычисление предела последовательности с помощью умножения на сопряжённое выражение. Раскрытие неопределённостей вида $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$

«Университет развивает все способности, в том числе — глупость».

А.П. Чехов.

Пусть S – выражение, содержащее корни. По определению, выражение K называется *сопряжённым* по отношению к S, если произведение $S\cdot K$ не содержит корней. Рассмотрим примеры.

1) Для $S=\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$ сопряжённым будет выражение $K=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$, так как $S\cdot K=a-b$.

2) Для выражения $S=\sqrt[3]{a}\mp\sqrt[3]{b}$ сопряжённым будет выражение $K=\sqrt[3]{a^2}\pm\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$, так как $S\cdot K=a-b$.

3) Для выражения $S=\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}$ сопряжённым будет выражение $K=\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+...+\sqrt[n]{b^{n-1}}$, так как $S\cdot K=a-b$.

Приём умножения (с одновременным делением) на сопряжённое выражение позволяет, в частности, раскрывать неопределённости вида $\infty-\infty$, $\infty\cdot 0$. Рассмотрим общий подход к раскрытию неопределённостей указанного вида.

1) Пусть при вычислении предела $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(n)-g(n))$ имеется неопределённость $\infty-\infty$. Следующие пробразования позволяют свести эту неопределённость к неопределённости вида $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{n\to+\infty}(f(n)-g(n))=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{f(n)}}-\frac{1}{\frac{1}{g(n)}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{g(n)}-\frac{1}{f(n)}}{\frac{1}{g(n)}\cdot\frac{1}{f(n)}}.$$

2) Пусть при вычислении предела $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(n)g(n))$ имеется неопределённость $0\cdot\infty$. Следующие пробразования позволяют свести эту неопределённость к неопределённостям вида $\frac{0}{0}$

$$\lim_{n\to+\infty}(f(n)g(n))=\lim_{n\to+\infty}\frac{f(n)}{\frac{1}{g(n)}}$$

или вида $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{n\to+\infty}(f(n)g(n))=\lim_{n\to+\infty}\frac{g(n)}{\frac{1}{f(n)}}.$$

Пример 83. [6, № 47] Вычислить предел последовательности

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}).$$

Решение. Имеем неопределённость вида $\infty-\infty$, для раскрытия которой умножим и разделим выражение под знаком предела на сопряжённое:

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to+\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.\ \square$$

Проверь свои знания:

Вычислить пределы последовательностей:

№236. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^4+2n^2+n+1}-\sqrt{n^4-3n^2+5}\right)$;

№237. $\lim\limits_{n\to+\infty}n^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{n+\frac{1}{n}}-\sqrt{n}\right)$;

№238. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+2n})$;

№239. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+1}{2n+1}-\frac{4n^2+1}{8n+1}\right)$.

5.8 Предварительные преобразования выражений под знаком предела

«Эксперт — это человек, который совершил все возможные ошибки в очень узкой специальности».

Нильс Бор (1885–1962) – датский физик-теоретик и общественный деятель, один из создателей современной физики. Лауреат Нобелевской премии по физике (1922).

Часто встречаются ситуации, когда прежде чем вычислить предел, необходимо преобразовать (упростить) выражение под знаком предела, приведя его к более удобному виду. Для этих целей используются различные формулы алгебраических, тригонометрических, логарифмических, гиперболических и прочих преобразований.

Пример 84. Найти предел последовательности $\lim\limits_{n\to+\infty}(\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha\cdot\ldots\cdot\cos(2^n\alpha))$, где $\alpha\neq\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Решение. Воспользуемся формулой

$$\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha\cdot\ldots\cdot\cos(2^n\alpha)=\frac{\sin(2^{n+1}\alpha)}{2^{n+1}\sin\alpha}.$$

Последовательность $x_n=\sin(2^{n+1}\alpha)$ ограничена, а последовательность $y_n=\dfrac{1}{2^{n+1}\sin\alpha}\to 0$ (см. этот вид пределов далее), поэтому данный предел равен 0. $\square$

Найти пределы последовательностей:

№240. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$;

№241. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}\right)$;

№242. [6, № 51] $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$;

№243. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{5n^2}$;

№244. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{\sqrt{9n^4+1}}$;

№245. [6, № 53] $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\dfrac{3^2}{n^3}+\ldots+\dfrac{(n-1)^2}{n^3}\right)$;

№246. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)!-n!}{(n+1)!}$;

№247. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}$;

№248. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\cos\dfrac{\pi}{4}\cdot\cos\dfrac{\pi}{8}\cdot\ldots\cdot\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$;

№249. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[2n]{1^n+2^n+\ldots+2020^n}$.

№250. Найти такое значение x, что

$$\lim_{n\to+\infty}\left((1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdot\ldots\cdot(1+x^{2^n})\right)=2020.$$

5.9 Использование соотношений эквивалентности

Назовём две бесконечно малые (бесконечно большие) последовательности $\{\alpha(n)\}$ и $\{\bar{\alpha}(n)\}$ с отличными от нуля членами *эквивалентными* при $n\to+\infty$, если $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\alpha(n)}{\bar{\alpha}(n)}=1$. Обозначение: $\alpha(n)\sim\bar{\alpha}(n)$.

Пусть $\alpha(n)$, $\beta(n)$ – бесконечно малые (бесконечно большие) последовательности. При вычислении пределов вида[1]

$$\lim_{n\to+\infty}\alpha(n),\quad \lim_{n\to+\infty}(\alpha(n)\beta(n)),\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha(n)}{\beta(n)}$$

при необходимости можно заменять все (или некоторые) бесконечно малые (большие) множители на эквивалентные им, что не влияет на значение предела:

$$\lim_{n\to+\infty}\alpha(n)=\lim_{n\to+\infty}\bar{\alpha}(n),\quad \lim_{n\to+\infty}(\alpha(n)\beta(n))=\lim_{n\to+\infty}(\bar{\alpha}(n)\bar{\beta}(n)),$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha(n)}{\beta(n)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\bar{\alpha}(n)}{\bar{\beta}(n)},$$

где $\alpha(n)\sim\bar{\alpha}(n)$, $\beta(n)\sim\bar{\beta}(n)$. Этот приём используют при раскрытии неопределённостей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ или просто для упрощения выражения под знаком предела.

[1] В общем случае под знаком предела может находиться произведение или частное нескольких сомножителей.

Пусть $\{x_n\}$ – бесконечно малая последовательность. Приведём наиболее известные соотношения эквивалентности:

$$\sin x_n \sim x_n, \quad \operatorname{tg} x_n \sim x_n, \quad \arcsin x_n \sim x_n,$$

$$\operatorname{arctg} x_n \sim x_n, \quad 1 - \cos x_n \sim \frac{x_n^2}{2}, \quad \ln(1 + x_n) \sim x_n,$$

$$a^{x_n} - 1 \sim x_n \cdot \ln a \ \ (a > 0, a \neq 1), \quad e^{x_n} - 1 \sim x_n.$$

$$(1 + x_n)^a \sim 1 + a x_n \quad (a \in \mathbb{R}).$$

Эти соотношения следуют из разложений элементарных функций по формуле Тейлора (Маклорена) и позже будут доказаны в курсе математического анализа. Пока мы будем использовать указанные соотношения эквивалентности, приняв их к сведению (без доказательства). Их смысл – замена общего члена б. м. (или б. б.) последовательности, по сути, её главным членом, что приводит к упрощению вычисления предела.

Пример 85. Найти предел последовательности:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(n^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2n+1} \right).$$

Решение. Так как при $n \to +\infty$ имеем $\operatorname{tg} \dfrac{1}{2n+1} \sim \dfrac{1}{2n+1}$, то

$$\lim_{n \to +\infty} \left(n^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2n+1} \right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{2n+1} = +\infty. \ \square$$

Используя соотношения эквивалентности, найти пределы последовательностей:

№251. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left((1 - 3n^2) \cdot \operatorname{arctg}^2 \dfrac{n}{3n^2 - 1} \right)$;

№252. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt[4]{5n^4 + 3n + 1} + n + \sin^3 n}{9n - 1}$;

№253. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(3n^2 + 5n + 10)^2 (2n - 1)^8}{(10n^3 + 3n + 1)(2n + 1)^4 (3n + 17)^4}$.

5.10 Пределы вида $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(n)g(n))$, где $f(n)$ – ограниченная последовательность, а $g(n)$ – бесконечно малая

«Талант сам по себе бесцветен и приобретает окраску только в применении».

М.Е. Салтыков-Щедрин.

Вычисление данного вида пределов основывается на следующей известной теореме.

Теорема. Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность есть бесконечно малая последовательность.

В силу теоремы, все пределы указанного вида равны нулю.

Пример 86. Найти предел $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin(n!+1)}{\sqrt{n}\cdot\ln(3n+2)}$.

Решение. Предел равен нулю, так как последовательность $x_n=\sin(n!+1)$ является ограниченной ($|\sin(n!+1)|\leqslant 1$), а последовательность $\dfrac{1}{\sqrt{n}\cdot\ln(3n+2)}$ – бесконечно малой. □

Найти пределы последовательностей, преобразовав выражения под знаком предела к произведению ограниченной и б. м. последовательностей:

№254. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin(2-\cos^2 n)}{\ln(n+1)}$;

№255. [6, № 48] $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\cdot\sin n!}{n+1}$;

№256. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}(2-n)}{n^2+3}$;

№257. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

5.11 Использование принципа двусторонней ограниченности

Теорема (*принцип двусторонней ограниченности*). Пусть, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство

$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, причём последовательности $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ сходятся к числу a: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$. Тогда последовательность $\{y_n\}$ также сходится и $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = a$.

Пример 87. Найти предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2n+1}{3n-2}\right)^n$.

Решение. Так как с ростом n основание степени стремится к $\dfrac{2}{3}$, то можно утверждать, что, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $0 < \dfrac{2n+1}{3n-2} < \dfrac{3}{4}$, отсюда $0 < \left(\dfrac{2n+1}{3n-2}\right)^n < \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$. Поскольку $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$, то, согласно принципу двусторонней ограниченности, и $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2n+1}{3n-2}\right)^n = 0$. $\square$

Используя принцип двусторонней ограниченности, вычислить пределы:

№258. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}\right)$;

№259. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin((\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt[4]{n})$;

№260. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^k}{n^n}$.

Доказать утверждения, используя принцип двусторонней ограниченности:[1]

№261. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0$, где $a > 1$, $k > 0$ $(a, k \in \mathbb{R})$;

№262. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\log_a n}{n} = 0 \ \ (a > 1)$;

№263. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0 \ \ (a > 1)$;[2]

№264. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$;

[1] Некоторые из этих задач уже решались ранее, но для полноты изложения и в силу их важности ещё раз приводим эти задачи здесь.

[2] Т. е. скорость роста факториала выше, чем у любой показательной функции.

№265. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \ \ (a > 0)$;

№266. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;

№267. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$;

№268. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$;

№269. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$;

№270. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1 + e^n + e^{2n} + e^{3n} + ... + e^{100n}\right)}{\ln(1+e^n)}$;

№271. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

5.12 Когда предел последовательности не существует

Иногда встречаются последовательности, у которых не существует ни конечного, ни бесконечного пределов. Такие последовательности относятся к расходящимся. Пример последовательности подобного типа: $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Обычно в этих случаях удаётся выделить из последовательности как минимум две подпоследовательности, сходящиеся к различным пределам. Это противоречит тому, что если последовательность имеет предел (конечный или бесконечный), то все её подпоследовательности имеют тот же предел.

Проверь свои знания:

№272. Доказать, что последовательность $\{(-1)^n\}$ расходится.

№273. Найти предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{1 + n^2 \cos\frac{\pi n}{2}}$.

№274. Сходится ли последовательность $x_n = \sin(n^\circ)$?

№275. Найти предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}(2-n^2)}{n^2+3}$.

5.13 Показательно-степенные последовательности и их пределы. Раскрытие неопределённостей 0^0, ∞^0, 1^∞

Пусть требуется вычислить предел от показательно-степенного выражения вида $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)^{g(n)}$, где $f(n) > 0$. Рассмотрим несколько типичных случаев.

1. Если $f(n) \to a$, где $|a| < 1$, а $g(n) \to +\infty$, то такой предел равен нулю (здесь нет неопределённости).

Пример 88. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n = 0$, т. к. $\dfrac{n}{2n+1} \to \dfrac{1}{2} < 1$. $\square$

2. Если $f(n) \to a$, где $|a| > 1$, а $g(n) \to +\infty$, то такой предел равен $+\infty$ (здесь также нет неопределённости).

Пример 89. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3n}{2n+1}\right)^{n^2} = +\infty$, т. к. $\dfrac{3n}{2n+1} \to \dfrac{3}{2} > 1$. $\square$

Рассмотрим ещё один пример предела, в котором не возникает неопределённости.

Пример 90. Найти предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{7 + \dfrac{2n}{n^2-1}}$.

Решение. Выражение под знаком корня стремится к 7, а показатель степени $\dfrac{1}{n} \to 0$, поэтому выражение $\sqrt[n]{7 + \dfrac{2n}{n^2-1}}$ стремится к $7^0 = 1$. (В рассуждениях неявно использовалась непрерывность показательной и дробно-рациональной функций). $\square$

В других случаях вычисление пределов такого рода осложняется наличием неопределённостей вида 0^0, ∞^0, 1^∞. Рассмотрим основные приёмы раскрытия этих неопределённостей.

3. Пусть требуется вычислить $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)^{g(n)}$, где $f(n) \to 0$ и $g(n) \to 0$ при $n \to +\infty$ (неопределённость вида 0^0). При раскрытии неопределённости данного типа обычно переходят к основанию e при помощи основного логарифмического тождества: $a = e^{\ln a}$ $(a > 0)$:

$$\lim_{n\to+\infty} f(n)^{g(n)} = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln f(n)^{g(n)}} = \lim_{n\to+\infty} e^{g(n)\ln f(n)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln f(n)}{\frac{1}{g(n)}}}.$$

В результате неопределённость исходного вида оказывается сведена к более изученному типу неопределённости: $\frac{\infty}{\infty}$. Иногда в такой ситуации бывает удобнее перейти к пределу соответствующей функции (этот способ рассмотрен далее).

4. Неопределённости вида ∞^0, 1^∞ вычисляются с использованием известных пределов, а также могут быть сведены к неопределённостям $\frac{\infty}{\infty}$ (или $\frac{0}{0}$) переходом к основанию e.

Пример 91. Найти предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{7^n n^2 - 3n^5}$.

Решение. Поскольку $7^n n^2 - 3n^5 \to +\infty$, а $\dfrac{1}{n} \to 0$, то имеем неопределённость вида ∞^0. Для того чтобы раскрыть её, преобразуем подкоренное выражение, тогда получим

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{7^n n^2 - 3n^5} = \lim_{n\to+\infty} \left(7(\sqrt[n]{n})^2 \sqrt[n]{1 - \frac{3n^3}{7^n}}\right).$$

Так как $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1 - \dfrac{3n^3}{7^n}} = 1$, то

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{7^n n^2 - 3n^5} = 7. \ \square$$

5. Для раскрытия неопределённостей вида 1^∞ существует ещё один удобный приём, основанный на применении второго замечательного предела:

$$\lim_{n\to+\infty} f(n)^{g(n)} = \lim_{n\to+\infty} (1 + (f(n) - 1))^{g(n)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left((1 + (f(n) - 1))^{\frac{1}{f(n)-1}}\right)^{g(n)(f(n)-1)} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty} g(n)(f(n)-1)},$$

поскольку $(1 + (f(n) - 1))^{\frac{1}{f(n)-1}} \to e$.

Пример 92. Найти предел последовательности

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5n + 11}{5n - 7}\right)^{3n}.$$

Решение. Применяя данный приём, получаем

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5n + 11}{5n - 7}\right)^{3n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{18}{5n - 7}\right)^{3n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\left(1 + \frac{18}{5n-7}\right)^{\frac{5n-7}{18}} \right)^{\frac{18\cdot 3n}{5n-7}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{54n}{5n-7}} = e^{\frac{54}{5}}. \square$$

Проверь свои знания:

Найти пределы последовательностей:

№276. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sin \dfrac{2\pi n}{3n+1}\right)^n$;

№277. [6, № 528] $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos^n \left(\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)$;

№278. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2^n}{n+2^n}\right)^n$;

№279. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{2n}$;

№280. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n^2+7n+3}{n^2+1}\right)^{2n}$.

№281. Функция $f(x)$ имеет производную в точке a. Найти предел

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right)^n.$$

5.14 Другие приёмы вычисления пределов последовательностей

Для отдельных задач на вычисление пределов последовательностей существуют свои (специфические) приёмы. Рассмотрим пример.

Пример 93. Найти предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{2n}\right)$.

Указание: воспользоваться формулой Эйлера.[1]

[1] В 1740 году Эйлером было получено асимптотическое выражение для суммы первых n членов гармонического ряда: $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n} = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$, где $\gamma = 0,5772...$ — постоянная Эйлера—Маскерони, а $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to +\infty$.

Решение. Обозначим $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$, тогда

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} = S_{2n} - S_n =$$

$$= (\ln 2n + \gamma + \varepsilon_{2n}) - (\ln n + \gamma + \varepsilon_n) = \ln 2 + (\varepsilon_{2n} - \varepsilon_n) \ \to \ln 2. \ \square$$

Проверь свои знания:

Вычислить пределы последовательностей:

№282. [6, № 52] $\lim\limits_{n\to+\infty} \left| \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - ... + \frac{(-1)^{n-1} n}{n} \right|$;

№283. [6, № 55] $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + ... + \frac{2n-1}{2^n} \right)$;

№284. [6, № 56] $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} \right)$;

№285. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \right)$;

№286. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right)$;

№287. [6, № 57] $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot ... \cdot \sqrt[2^n]{2} \right)$;

№288. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + ... + n(n+1)}{n^3}$.

№289. Доказать, что неравенство $11^n > 10^n + 9^n$ справедливо для всех достаточно больших натуральных чисел n.

№290. [6, № 67] Какое из выражений больше при достаточно больших n:

а) $100n + 200$ или $0,01n^2$; б) 2^n или n^{1000}; в) 1000^n или $n!$?

5.15 (*)Вычисление предела последовательности переходом к пределу функции

При вычислении предела числовой последовательности $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)$ бывает удобно перейти к пределу соответствующей функции

$$\lim_{x\to+\infty} f(x),$$

фактически обобщив задачу и заменив натуральную переменную – индекс n – на действительную переменную x.[1] Это позволяет при вычислении предела использовать более мощный аппарат, включая применение производных, что невозможно в случае последовательностей, которые не дифференцируемы.

Этот приём с обобщением следует применять осторожно, так как полученный предел функции может и не существовать, в то время как исходный предел последовательности существует. Но если предел функции $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ существует (неважно, конечный или бесконечный), то предел последовательности $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)$ также существует, и эти пределы равны.

Рассмотрим пример.

Пример 94. Найти $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\cdot\arccos\dfrac{n^2}{n^2+1}\right)$.

Решение. Рассмотрим предел функции $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\arccos\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)$. Если он существует, то предел последовательности равен ему. Сделаем замену $t=\arccos\dfrac{x^2}{x^2+1}\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, так как $\dfrac{x^2}{x^2+1}>0$. Тогда $\cos t=\dfrac{x^2}{x^2+1}\Rightarrow x=\sqrt{\dfrac{\cos t}{1-\cos t}}$. Получили предел

$$\lim_{t\to0}\sqrt{\frac{\cos t}{1-\cos t}}\cdot t=\lim_{t\to0}\frac{t}{\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{t\to0}\frac{t}{|\sin\frac{t}{2}|}=$$

$$=(\text{так как }\sin\frac{t}{2}>0)=\sqrt{2}\cdot\lim_{t\to0}\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}=\sqrt{2}.\ \square$$

5.16 (*)Критерий Коши и теорема сравнения при исследовании сходимости числовой последовательности

«Я ненавижу процесс оценивания, я ненавижу экзамены. Это катастрофа [...] Одна из моих личных целей — убить экзамены. Сам процесс обучения убивает всяческое желание

[1]Этот приём вы сможете использовать позже, когда познакомитесь и научитесь вычислять пределы функций.

учиться. Мы из школы выпускаем людей уже с инвалидностью, что его всю жизнь будут оценивать».

Герман Греф, президент и председатель правления Сбера. Сентябрь 2019 г., в ходе пленарной сессии банка на Восточном экономическом форуме.

«Думаю, через пять лет мир будет уходить от экзаменов, как только интегрированные цифровые платформы, искусственный интеллект будут внедрены в образование, серьезно изменится и обучение, и процесс проверки знаний».

Герман Греф, 22 мая 2021 г., на марафоне «Новое знание»).

«Надо напомнить господину Грефу, что мы уже встали на путь отказа от экзаменов, потому что появление единого госэкзамена привело к отказу от вступительных испытаний в вузы. Там теперь сидят не приёмные комиссии, а бухгалтерские, которые складывают результаты школьных ЕГЭ и, исходя из получившейся суммы баллов, зачисляют абитуриентов то на бюджет, то на платное отделение».

Геннадий Онищенко, первый заместитель председателя комитета Госдумы по образованию и науке с 5 октября 2016 г.

«В истории нашей страны, в её послереволюционный период, было время полной отмены экзаменов, но, как мы все прекрасно знаем, ничего хорошего для школьного образования это не принесло, и проверочные испытания вернулись. Мы прошли этот опыт сто лет назад».

Ольга Васильева, Министр образования и науки Российской Федерации с 19 августа 2016 г. по 8 мая 2018 г.

«При всем уважении к заслугам в банковском деле господина Грефа, это размашистое непрофессиональное и несерьёзное высказывание».

Евгений Ямбург, заслуженный учитель России, доктор педагогических наук, академик РАО, директор Центра образования № 109 (Москва) – «Школы Ямбурга».

См. далее отдельный семинар, посвящённый этой теме.

5.17 (*)Теорема Штольца и её применение при вычислении пределов последовательностей

Данная теорема применяется при раскрытии неопределённостей вида $\frac{\infty}{\infty}$ и будет рассмотрена на семинаре, посвящённом критерию Коши.

5.18 (*)Вычисление предела последовательности как предела интегральной суммы

В некоторых случаях последовательность можно интерпретировать как интегральную сумму для некоторой функции на определённом отрезке. Тогда возникает ещё один способ вычисления её предела – переходом к определённому интегралу Римана (к этому приёму можно обратиться позже, когда вы познакомитесь подробнее с определённым интегралом Римана). Продемонстрируем этот приём на примере.

Пример 95. С помощью определённого интеграла найти предел последовательности

$$x_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + ... + \frac{n-1}{n^2}.$$

Решение. Имеем по условию $x_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n}$. А теперь представим себе, что требуется вычислить определённый интеграл Римана от функции $f(x) = x$ по отрезку $[0,1]$, разбивая этот отрезок на n равных частей точками $x_i = i/n$, $i = \overline{0,n}$ (т. е. $\Delta x_i = 1/n$), и выбирая значения промежуточных точек $\xi_i = x_i$. Составим соответствующую интегральную сумму

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n}.$$

Очевидно, данная интегральная сумма и наша последовательность есть одно и то же. Тогда предел последовательности совпадает с пределом интегральной суммы $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, т. е. с интегралом Римана

$$\int\limits_0^1 x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}. \square$$

Проверь свои знания:

№291. Рассматривая выражение под знаком предела как интегральную сумму для некоторой функции на некотором отрезке (подобрать), определить, какому определённому интегралу равен этот предел, и найти его:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+...+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right).$$

№292. С помощью определённого интеграла найти предел последовательности

$$x_n=\frac{1^p+2^p+...+n^p}{n^{p+1}}\quad(p>0).$$

5.19 Ответы и решения

211. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим

$$|x_n - 2| = \left|\frac{2n^2 - n + 2}{n^2 + 3n - 1} - 2\right| = \left|\frac{-7n + 4}{n^2 + 3n - 1}\right| = \frac{7n - 4}{n^2 + 3n - 1} <$$

$$< \frac{7n}{n^2 + 3n - 1} < \frac{7n}{n^2} = \frac{7}{n} < \varepsilon.$$

Из последнего неравенства находим $n > \frac{7}{\varepsilon}$, например, возьмём $N(\varepsilon) = \left[\frac{7}{\varepsilon}\right] + 1$.

212. Пусть $\{x_n\}$ сходится к a, тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $\forall\ n > N$ выполняется $|x_n - a| < \varepsilon$. Тогда, в силу неравенства $|x - y| \geqslant ||x| - |y||$, имеем $||x_n| - |a|| \leqslant |x_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$.

213. Это неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$. Вынесем за скобку в числителе и знаменателе наибольшую степень, соответственно, n и n^3, и сократим дробь на общий множитель n:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{7n + 1}{5n^3 - 3n + 2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n(7 + \frac{1}{n})}{n^3(5 - \frac{3}{n^2} + \frac{2}{n^3})} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{7 + \frac{1}{n}}{n^2(5 - \frac{3}{n^2} + \frac{2}{n^3})}.$$

Проверим, сохранилась ли неопределённость. Устремив n к $+\infty$, видим, что теперь числитель стремится к 7, а знаменатель по-прежнему к ∞. Неопределённость пропала, предел можно вычислить, он оказался равен 0.

214. Устремляя $n \to +\infty$, обнаруживаем неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$. Вынесем максимальную степень в числителе и в знаменателе и сократим на n^2:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{-3n^4 + 10n^2 - 1}{n^2 + 23n - 9} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^4(-3 + \frac{10}{n^2} - \frac{1}{n^4})}{n^2(1 + \frac{23}{n} - \frac{9}{n^2})} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2(-3 + \frac{10}{n^2} - \frac{1}{n^4})}{1 + \frac{23}{n} - \frac{9}{n^2}}.$$

Теперь хорошо видно, что числитель дроби стремится к $-\infty$, а знаменатель к 1, поэтому их отношение в пределе равно $-\infty$.

215. После сокращения на n^2 имеем:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(\frac{5}{n}-1)^2+(\frac{5}{n}+1)^2}{(\frac{5}{n}-1)^2-(\frac{5}{n}+1)^2}.$$

Поскольку числитель дроби стремится к 2, а знаменатель к (-0), то предел равен $-\infty$.

216. Имеем неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$, для раскрытия которой поделим на n одновременно числитель и знаменатель дроби

$$\lim_{n\to\infty}\frac{12+\frac{5}{n}}{\sqrt[3]{27+\frac{6}{n}+\frac{8}{n^3}}}=\frac{12}{\sqrt[3]{27}}=4.$$

217. Имеем неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$, для раскрытия которой разделим одновременно числитель и знаменатель на n^2:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{\sqrt{n}}-\frac{2}{n^2}}{5-\frac{7}{\sqrt[3]{n^5}}+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{5}.$$

218. Имеем неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$. Перепишем предел в виде: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\cdot4^n+9\cdot3^n}{16\cdot4^n+5}$ и разделим числитель и знаменатель дроби на 4^n: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+9\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n}{16+5\left(\frac{1}{4}\right)^n}=\dfrac{1}{8}$.

219. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-6)^n-5^{n+1}}{5^n-(-6)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-6)^n(1-5\cdot(-\frac{5}{6})^n)}{(-6)^n((-\frac{5}{6})^n-(-6))}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-5\cdot(-\frac{5}{6})^n}{(-\frac{5}{6})^n-(-6)}=\frac{1}{6}.$$

220. Смысл этого равенства в том, что показательная функция a^x при $x\to+\infty$ растёт быстрее степенно́й x^k. Докажем этот факт на языке последовательностей, не переходя к функциям действительного аргумента и используя при этом как вспомогательное средство бином Ньютона. В самом деле, для любого положительного $k\in\mathbb{R}$ найдётся $l\in\mathbb{N}$, $l>1$: $k\leqslant l$, тогда

$$0 < \frac{n^k}{a^n} \leqslant \frac{n^l}{a^n} = \left(\frac{n}{\sqrt[l]{a^n}}\right)^l = \left(\frac{n}{b^n}\right)^l,$$

где $b = \sqrt[l]{a} > 1$. Имеем дальше:

$$0 < \frac{n}{b^n} = \frac{n}{(1+(b-1))^n} = \frac{n}{1 + n(b-1) + \frac{n(n-1)}{2}(b-1)^2 + ... + (b-1)^n}$$
$$< \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}(b-1)^2} \to 0 \text{ при } \to \infty.$$

Согласно принципу двусторонней ограниченности это доказывает утверждение.

221. Смысл этого равенства в том, что логарифмическая последовательность $\log_a n$ при $n \to +\infty$ растёт медленнее степенной n. Это неравенство было доказано, используя бином Ньютона, на предыдущем семинаре.

222. Для любого a всегда найдётся $m \in \mathbb{N}$: $q = \dfrac{|a|}{m+1} < 1$. Имеем:

$$0 < \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|}{1} \cdot \frac{|a|}{2} \cdot ... \cdot \frac{|a|}{m} \cdot \frac{|a|}{m+1} \cdot ... \cdot \frac{|a|}{n} < \frac{|a|^m}{m!}\left(\frac{|a|}{m+1}\right)^{n-m}.$$

Последовательность q^{n-m} является бесконечно малой, а значит, согласно принципу двусторонней ограниченности, последовательность под знаком предела также является бесконечно малой.

223. При $a = 1$ равенство очевидно. Пусть $a > 1$, тогда $\sqrt[n]{a} > 1$ и

$$a = (1 + (\sqrt[n]{a} - 1))^n > 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1) > n(\sqrt[n]{a} - 1),$$

откуда получаем $0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \dfrac{a}{n} < \varepsilon$ при $n > \frac{a}{\varepsilon}$, т. е. $\sqrt[n]{a} \to 1$ при $n \to +\infty$.

Если $0 < a < 1$, то $\dfrac{1}{a} > 1$ и, по доказанному, $\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}} \to 1$ при $n \to +\infty$. Но тогда $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1.$

224. Из очевидного неравенства

$$n = (1 + (\sqrt[n]{n} - 1))^n = 1 + n(\sqrt[n]{n} - 1) + \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 + ...$$

$$... + (\sqrt[n]{n} - 1)^n > \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2$$

следует, что $|\sqrt[n]{n} - 1| < \sqrt{\dfrac{2}{n-1}} < \varepsilon \ \ \forall\, \varepsilon > 0, \forall\, n > 1 + \dfrac{2}{\varepsilon^2}$.

225. Воспользуемся неравенством $(n/3)^n < n!$ (доказывается методом математической индукции), тогда

$$0 < \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \frac{1}{\sqrt[n]{(n/3)^n}} = \frac{3}{n}.$$

Так как $3/n \to 0$ при $n \to +\infty$, то, согласно принципу двусторонней ограниченности, последовательность под знаком предела также является бесконечно малой.

226. Выделим 1-й замечательный предел:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n^2 \cdot \sin\frac{1}{3n^2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{3n^2}}{\frac{1}{3n^2}} = \frac{1}{3}.$$

227. Выделим 2-й замечательный предел:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{3n}\right)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}.$$

228. Перейдём в данном рекуррентном равенстве к пределу, устремив $n \to +\infty$. Учитывая, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} = A$, получим

$$\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \tfrac{1}{2} \lim_{n\to+\infty}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \Leftrightarrow A = \tfrac{1}{2}\left(A + \frac{a}{A}\right) \Leftrightarrow A = \sqrt{a}.$$

229. Предположив существование предела a, перейдём в рекуррентном равенстве к пределу:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+2} = \lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1} + \frac{1}{a_n}\right).$$

Учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, получим уравнение $a = a + \frac{1}{a}$, которое не имеет решений. Пришли к противоречию, следовательно, предел не существует, и последовательность расходится.

230. Перепишем данное рекуррентное соотношение, введя новую последовательность $y_n = x_n + 1$. Имеем

$$y_{n+1} = x_{n+1} + 1 = 2x_n + 1 + 1 = 2(x_n + 1) = 2y_n.$$

Отсюда получаем, что $y_n = 2^{n-1}y_1$, а значит, $x_n = 2^{n-1}(x_1 + 1) - 1$. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ является ограниченной в единственном случае, а именно при $x_1 = -1$. Во всех остальных случаях $x_n \to \infty$.

231. Если выписать явно несколько первых членов этой последовательности, то получим: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$,..., т. е. $x_n = (-1)^n$. Но, как известно, такая последовательность расходится (она содержит две подпоследовательности, сходящиеся к разным пределам). Поэтому данный приём здесь не применим. Если бы, тем не менее, мы перешли в рекуррентном равенстве к пределу (обозначим его a), то получили бы в результате $a = -a$, т. е. $a = 0$ (последовательность сходится к нулю), что неверно.

232. Обозначим $a_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2}}}}_{n \text{ корней}}$, а данный предел через a. Возводя один раз в квадрат, получим рекуррентное соотношение: $a_n^2 = 2 + a_{n-1}$. Переходя в этом равенстве к пределу при $n \to +\infty$, получим $a^2 = 2 + a$, откуда с учётом положительности находим $a = 2$.

233. Обозначим $a_{2n} = \underbrace{\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5...\sqrt{3\sqrt{5}}}}}}}_{2n \text{ корней}}$, а предел через a. Возводя последовательно 2 раза в квадрат, получим рекуррентное соотношение: $a_{2n}^4 = 45 \cdot a_{2(n-1)}$. Переходя в этом равенстве к пределу при $n \to +\infty$, получим $a^4 = 45a$, откуда находим $a = \sqrt[3]{45}$.

234. Рассмотрим последовательность $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2 + x}$, ..., $a_n = \sqrt{2 + x \cdot a_{n-2}}$ (x – фиксировано). По условию, последовательность $\{a_n\}$ сходится и её предел равен 2. Найдём, при каких значениях x это верно. Перейдём к пределу при $n \to +\infty$

в рекуррентном равенстве $a_n = \sqrt{2 + x \cdot a_{n-2}}$:

$$2 = \sqrt{2 + x \cdot 2} \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

235. Имеется неопрелелённость $\frac{\infty}{\infty}$. Сделаем подстановку $y_n = \sqrt[12]{x_n}$, тогда $y_n \to 1$ и получим

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[4]{x_n} - 1}{\sqrt[3]{x_n} - 1} = \lim_{y_n\to 1} \frac{y_n^3 - 1}{y_n^4 - 1} = \lim_{y_n\to 1} \frac{(y_n - 1)(y_n^2 + y_n + 1)}{(y_n - 1)(y_n + 1)(y_n^2 + 1)} =$$

$$= \lim_{y_n\to 1} \frac{y_n^2 + y_n + 1}{(y_n + 1)(y_n^2 + 1)} = \frac{3}{4}.$$

236. Имеем неопределённость вида $\infty - \infty$, для раскрытия которой умножим и разделим выражение под знаком предела на сопряжённое:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\left(\sqrt{n^4 + 2n^2 + n + 1} - \sqrt{n^4 - 3n^2 + 5}\right)}{\sqrt{n^4 + 2n^2 + n + 1} + \sqrt{n^4 - 3n^2 + 5}} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\sqrt{n^4 + 2n^2 + n + 1} + \sqrt{n^4 - 3n^2 + 5}\right)\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{5n^2 + n - 4}{\sqrt{n^4 + 2n^2 + n + 1} + \sqrt{n^4 - 3n^2 + 5}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{5 + \frac{1}{n} - \frac{4}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4}} + \sqrt{1 - \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n^4}}} = \frac{5}{2}.$$

237. Имеем неопределённость вида $\infty \cdot 0$. Умножением и делением выражения под знаком предела на сопряжённое выражение (к разности в скобках) придём к неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{3}{2}} \frac{\left(\sqrt{n + \frac{1}{n}} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n + \frac{1}{n}} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n + \frac{1}{n}} + \sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{3}{2}} \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{n + \frac{1}{n}} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n + \frac{1}{n}} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2}.$$

238. Последовательными преобразованиями получим

$$\lim_{n\to+\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+2n})=\lim_{n\to+\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+2n}-\pi n)=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\sin^2\left(\pi(\sqrt{n^2+2n}-n)\right)=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\sin^2\frac{\pi\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}{\sqrt{n^2+2n}+n}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\sin^2\left(\pi\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\sin^2\left(\pi\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}\right)=0$$

в силу непрерывности функции синус (так как её аргумент стремится к π) и квадратичной функции.

239. Имеем неопределённость вида $\infty-\infty$, для раскрытия которой приведём дроби к общему знаменателю:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n^2+1)(8n+1)-(4n^2+1)(2n+1)}{(2n+1)(8n+1)}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{-3n^2+6n}{(2n+1)(8n+1)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-3+\frac{6}{n}}{(2+\frac{1}{n})(8+\frac{1}{n})}=-\frac{3}{16}.$$

240. Так как $1-\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{(k-1)(k+1)}{k^2}$ $(k=2,3,...,n)$, то

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=$$

$$=\frac{1\cdot3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot5}{4^2}\cdot...\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}.$$

Следовательно, $\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{n}=\dfrac{1}{2}$.

241. Преобразуем n-й член последовательности по формуле суммы первых n членов геометрической прогресссии с первым членом $b_1=1$ и знаменателем

$q = 1/2$: $x_n = b_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q} = 2\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$. Тогда $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right) = 2$, так как $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \to 0$.

242. Записывая дроби под общий знаменатель и применяя формулу суммы первых $(n-1)$-го членов арифметической прогрессии $S_n = \frac{a_1+a_n}{2}n$, получим:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+...+\frac{n-1}{n^2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+2+3+...+(n-1)}{n^2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{n}{2}(n-1)}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

243. Имеем: $1+3+5+...+(2n-1) = \dfrac{1+(2n-1)}{2}\cdot n = n^2$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+3+5+...+(2n-1)}{5n^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{5n^2} = \frac{1}{5}.$$

244. Преобразуем числитель по формуле суммы первых n членов арифметической прогрессии $S_n = \dfrac{a_1+a_n}{2}n$: $1+2+3+...+n = \dfrac{(1+n)n}{2}$. Тогда

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+2+3+...+n}{\sqrt{9n^4+1}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(1+n)n}{2\sqrt{9n^4+1}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2(\frac{1}{n}+1)}{2n^2\sqrt{9+\frac{1}{n^4}}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}+1}{2\sqrt{9+\frac{1}{n^4}}} = \frac{1}{6}.$$

245. Приведём выражение к общему знаменателю под знаком предела: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+...+(n-1)^2}{n^3}$. Воспользуемся формулой: $1^2+2^2+3^2+...+(n-1)^2 = \dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6}$ при $n \geqslant 2$ (доказывается, например, методом математической индукции):

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})}{6} = \frac{1}{3}.$$

Можно вывести тождество $1^2+2^2+...+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Для этого выпишем n равенств

$$2^3 = (1+1)^3 = 1^3 + 3\cdot 1^2\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 1^2 + 1^3,$$

$$3^3 = (2+1)^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2\cdot 1 + 3\cdot 2\cdot 1^2 + 1^3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(n+1)^3 = n^3 + 3\cdot n^2\cdot 1 + 3\cdot n\cdot 1^2 + 1^3$$

и сложим их между собой:

$$(n+1)^3 = 1 + 3(1^2+2^2+3^2+...+n^2) + 3(1+2+3+...+n) + n.$$

Отсюда с учётом $1+2+3+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ получим искомое:

$$1^2+2^2+...+n^2 = \frac{1}{3}((n+1)^3 - (n+1) - \frac{3}{2}n(n+1)) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

246. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)! - n!}{(n+1)!} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1.$

247. Выносим общий множитель $(2n+1)!$ за скобку и сокращаем на него:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+1)!(1+(2n+2))}{(2n+1)!(2n+2)(2n+3)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+2} = 0.$$

248. Умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на $2^{n+1}\cdot\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ и многократно воспользуемся в числителе формулой синуса двойного угла. В итоге получим:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot...\cdot\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n\left(2\cdot\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\cdot\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)\cdot...\cdot\cos\dfrac{\pi}{8}\cdot\cos\dfrac{\pi}{4}}{2^{n+1}\cdot\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\dfrac{\pi}{2}}{2^n\cdot\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{2}{\pi},$$

так как $\sin\dfrac{\pi}{2}=1$, $\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\sim\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ при $n\to+\infty$.

249. Вынесем $\sqrt{2020}$ и учтём, что при $0<q<1$ $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0$, а число слагаемых под корнем фиксировано:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[2n]{1^n+2^n+...+2019^n+2020^n}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{2020}\cdot\sqrt[2n]{\left(\frac{1}{2020}\right)^n+\left(\frac{2}{2020}\right)^n+...+\left(\frac{2019}{2020}\right)^n+1}=$$

$$=\sqrt{2020}.$$

250. Заметим, что предел равен 0 при $x=-1$ и равен ∞ при $x\in(-\infty,-1)\bigcup[1,+\infty)$. Следовательно, $|x|<1$. Умножим и разделим выражение под знаком предела на $(1-x)$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left((1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdot...\cdot(1+x^{2^n})\right)=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdot...\cdot(1+x^{2^n})}{1-x}.$$

Применяя в числителе многократно формулу разности квадратов, в итоге получим

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}=\frac{1}{1-x}.$$

Решая уравнение $\dfrac{1}{1-x}=2020$, находим $x=\dfrac{2019}{2020}$.

251. Поскольку $\left(\operatorname{arctg}\dfrac{n}{3n^2-1}\right)^2\sim\left(\dfrac{n}{3n^2-1}\right)^2$, то получим

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(1-3n^2)n^2}{(3n^2-1)^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-3n^4+n^2}{9n^4-6n^2+1}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{-3+\frac{1}{n^2}}{9-\frac{6}{n^2}+\frac{1}{n^4}}=-\frac{1}{3}.$$

252. Так как при $n\to+\infty$ имеем: $5n^4+3n+1\sim5n^4$, $\sqrt[4]{5n^4+3n+1}\sim\sqrt[4]{5}n$, $\sqrt[4]{5n^4+3n+1}+n+\sin^3n\sim(\sqrt[4]{5}+1)n$; $9n-1\sim9n$, то

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{5n^4+3n+1}+n+\sin^3n}{9n-1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(\sqrt[4]{5}+1)n}{9n}=\frac{\sqrt[4]{5}+1}{9}.$$

Замечание: можно было решить задачу иначе, разделив на n числитель и знаменатель дроби под знаком предела.

253. Заменим бесконечно большие при $n \to +\infty$ сомножители в числителе и знаменателе дроби на эквивалентные им б. б. выражения: $(3n^2 + 5n + 10)^2 \sim 9n^4$, $(2n-1)^8 \sim 2^8 n^8$, $10n^3 + 3n + 1 \sim 10n^3$, $(2n+1)^4 \sim 2^4 n^4$, $(3n+17)^4 \sim 3^4 n^4$. В результате выражение под знаком предела упростится и, вычисляя предел, получим:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(3n^2+5n+10)^2(2n-1)^8}{(10n^3+3n+1)(2n+1)^4(3n+17)^4} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{9n^4 \cdot 2^8 n^8}{10n^3 \cdot 2^4 n^4 \cdot 3^4 n^4} = +\infty.$$

254. Перепишем предел в виде

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\ln(n+1)} \cdot \sin(2 - \cos^2 n) \right).$$

Выражение $\sin(2 - \cos^2 n)$ описывает ограниченную последовательность (так как при всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено условие $|\sin(2 - \cos^2 n)| \leqslant 1$). При этом, очевидно, $\frac{1}{\ln(n+1)} \to 0$ при $n \to +\infty$ (б. м. п.) Поэтому данный предел равен нулю.

255. Делением числителя и знаменателя дроби на $n^{\frac{2}{3}}$ преобразуем предел к виду:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \cdot \sin n!}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n!}{n^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{n^{2/3}}}.$$

Этот предел равен 0 как предел произведения бесконечно малой последовательности $\dfrac{1}{n^{1/3} + n^{-2/3}}$ на ограниченную $\sin(n!)$.

256. Предел равен 0 как предел произведения ограниченной последовательности $(-1)^{n-1}$ и б. м. п. $\dfrac{2-n}{n^2+3}$.

257. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(\pi(\sqrt{n^2+1} - n) + \pi n) =$

$$= \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \sin\left(\pi \frac{(\sqrt{n^2+1} - n)(\sqrt{n^2+1} + n)}{\sqrt{n^2+1} + n} \right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n} = 0$$

как произведение ограниченной последовательности $(-1)^n$ на бесконечно малую последовательность $\sin \dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$.

258. Воспользуемся неравенством (доказывается по индукции):

$$0 < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$, то, в силу принципа двусторонней ограниченности, данный предел равен 0.

259. Оценим выражение под знаком предела:

$$0 \leqslant |\sin((\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt[4]{n})| \leqslant |(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt[4]{n}| =$$

$$= \left|\frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right| = \left|\frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{n}\left(1+\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\right)}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt[4]{n}\left(1+\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\right)}\right| \to 0$$

при $n \to +\infty$. Следовательно, предел равен нулю.

260. Отделим от суммы последнее слагаемое: $\sum\limits_{k=1}^{n} k^k = \sum\limits_{k=1}^{n-1} k^k + 1$. В первом слагаемом числитель можно оценить суммой $(n-1)$ первых членов геометрической прогрессии со знаменателем n:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^k < \sum_{k=0}^{n-1} n^k = \frac{n^n-1}{n-1}.$$

Следовательно, $0 < (\sum\limits_{k=1}^{n-1} k^k)/n^n < \dfrac{n^n-1}{(n-1)n^n} < \dfrac{1}{n-1}$. Так как $\frac{1}{n-1} \to 0$, то, согласно принципу двусторонней ограниченности, $(\sum\limits_{k=1}^{n-1} k^k)/n^n \to 0$. Ответ: предел равен 1.

261. Смысл этого равенства в том, что показательная функция a^x при $x \to +\infty$ растёт быстрее степенной x^k, т. е. $x^k = o(a^x)$. Докажем этот факт на языке последовательностей,

не переходя к функциям действительного аргумента и используя при этом как вспомогательное средство бином Ньютона. В самом деле, для любого положительного $k \in \mathbb{R}$ найдётся $l \in \mathbb{N}$, $l > 1$: $k \leqslant l$, тогда

$$0 < \frac{n^k}{a^n} \leqslant \frac{n^l}{a^n} = \left(\frac{n}{\sqrt[l]{a^n}}\right)^l = \left(\frac{n}{b^n}\right)^l,$$

где $b = \sqrt[l]{a} > 1$. Имеем дальше:

$$0 < \frac{n}{b^n} = \frac{n}{(1+(b-1))^n} = \frac{n}{1 + n(b-1) + \frac{n(n-1)}{2}(b-1)^2 + ... + (b-1)^n}$$
$$< \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}(b-1)^2} \to 0 \text{ при } \to \infty.$$

262. Смысл этого равенства в том, что логарифмическая последовательность $\log_a n$ при $n \to +\infty$ растёт медленнее степенной n. Докажем этот факт, используя бином Ньютона. Покажем вначале, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{b^n} = 0$ при $b > 1$:

$$0 < \frac{n}{b^n} = \frac{n}{(1+(b-1))^n} = \frac{n}{1 + n(b-1) + \frac{n(n-1)}{2}(b-1)^2 + ... + (b-1)^n}$$
$$< \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}(b-1)^2} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Это означает, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall\, n \geqslant N\ \ \dfrac{1}{b^n} < \dfrac{n}{b^n} < 1$. Положим $b = a^\varepsilon$, где $a > 1$, тогда

$$\frac{1}{a^{\varepsilon n}} < \frac{n}{a^{\varepsilon n}} < 1 \Leftrightarrow 1 < n < a^{\varepsilon n},$$

Логарифмируя это неравенство, получаем

$$0 < \log_a n < \varepsilon n \Leftrightarrow 0 < \frac{\log_a n}{n} < \varepsilon.$$

263. Для любого a всегда найдётся $m \in \mathbb{N}$: $q = \dfrac{|a|}{m+1} < 1$. Имеем:

$$0 < \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|}{1} \cdot \frac{|a|}{2} \cdot ... \cdot \frac{|a|}{m} \cdot \frac{|a|}{m+1} \cdot ... \cdot \frac{|a|}{n} < \frac{|a|^m}{m!}\left(\frac{|a|}{m+1}\right)^{n-m}.$$

Последовательность q^{n-m} является бесконечно малой, а значит, согласно принципу двусторонней ограниченности, после-

довательность под знаком предела также является бесконечно малой.

264. Доказательство следует из очевидного неравенства:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n < \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{n} = n^n.$$

Отсюда $0 < \dfrac{n!}{n^n} < \dfrac{1}{n} \to 0$ при $n \to +\infty$.

265. При $a = 1$ равенство очевидно. Пусть $a > 1$, тогда $\sqrt[n]{a} > 1$ и

$$a = (1 + (\sqrt[n]{a} - 1))^n > 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1) > n(\sqrt[n]{a} - 1),$$

откуда получаем $0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \dfrac{a}{n} < \varepsilon$ при $n > \frac{a}{\varepsilon}$, т. е. $\sqrt[n]{a} \to 1$ при $n \to +\infty$.

Если $0 < a < 1$, то $1/a > 1$ и, по доказанному, $\sqrt[n]{1/a} \to 1$ при $n \to +\infty$. Но тогда $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1.$

266. Из очевидного неравенства

$$n = (1 + (\sqrt[n]{n} - 1))^n = 1 + n(\sqrt[n]{n} - 1) + \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 + \ldots$$

$$\ldots + (\sqrt[n]{n} - 1)^n > \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2$$

следует, что $|\sqrt[n]{n} - 1| < \sqrt{\dfrac{2}{n-1}} < \varepsilon \ \ \forall\, \varepsilon > 0, \forall\, n > 1 + \dfrac{2}{\varepsilon^2}$.

267. Воспользуемся неравенством $(n/3)^n < n!$ (доказывается методом математической индукции), тогда

$$0 < \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \frac{1}{\sqrt[n]{(n/3)^n}} = \frac{3}{n}.$$

Так как $3/n \to 0$ при $n \to +\infty$, то, согласно принципу двусторонней ограниченности, последовательность под знаком предела также является бесконечно малой.

268. Так как $3 < x_n < \sqrt[n]{3^n + 3^n} = 3\sqrt[n]{2}$, а $\sqrt[n]{2} \to 1$, то получаем, в силу принципа двусторонней ограниченности, что $x_n \to 3$.

269. Оценим сумму под знаком предела сверху и снизу (че-

рез наибольшее и наименьшее слагаемые):

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$, то и данный предел равен 1.

270. Вынесем из каждой скобки наибольшее слагаемое:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+e^n+e^{2n}+e^{3n}+...++e^{99n}+e^{100n}\right)}{\ln(1+e^n)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(e^{100n}\left(\frac{1}{e^{100n}}+\frac{1}{e^{99n}}+\frac{1}{e^{98n}}+...+\frac{1}{e^n}+1\right)\right)}{\ln\left(e^n\left(\frac{1}{e^n}+1\right)\right)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{100n+\ln\left(\frac{1}{e^{100n}}+\frac{1}{e^{99n}}+\frac{1}{e^{98n}}+...+\frac{1}{e^n}+1\right)}{n+\ln\left(\frac{1}{e^n}+1\right)}.$$

Поскольку $\frac{n}{e^{100n}} < \frac{1}{e^{100n}} + \frac{1}{e^{99n}} + \frac{1}{e^{98n}} + ... + \frac{1}{e^n} < \frac{n}{e^n}$, а $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{e^{100n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{e^n} = 0$, то оба логарифма стремятся к нулю и предел равен 100.

271. Оценим сумму под знаком предела сверху и снизу через наибольшее и наименьшее слагаемые (количество слагаемых равно $(n+1)^2 - n^2 + 1 = 2n+2$):

$$\frac{2n+2}{\sqrt{(n+1)^2}} < \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} < \frac{2n+2}{\sqrt{n^2}},$$

$$2 < \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} < 2 + \frac{2}{n}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to +\infty$, получаем, что предел равен 2.

272. *1-й способ.* Всё бесконечное множество членов этой последовательности располагается в двух точках координатной оси: $x = 0$ и $x = 1$. Для того чтобы некоторое число a было пределом последовательности, надо, чтобы в любой ε-окрестности этой точки находились все члены данной последовательности,

начиная с некоторого. Пусть a – произвольное действительное число. Тогда всегда можно подобрать такое малое ε, чтобы в ε-окрестность этой точки не попали члены последовательности, либо выражаемые числом 1, либо выражаемые числом 0. Таким образом, вне этой окрестности будет находиться бесчисленное множество членов последовательности, и, значит, утверждение, что все члены последовательности, начиная с некоторого, будут лежать в ε-окрестности точки a, не справедливо. Следовательно, число a не будет пределом последовательности. Т. к. a произвольно, то нет такого числа, которое являлось бы пределом заданной последовательности.

2-й способ. Подпоследовательности с чётными и нечётными номерами сходятся к разным пределам, что противоречит утверждению о том, что у сходящейся последовательности все её подпоследовательности сходятся к одному пределу.

273. Пусть $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, тогда $\dfrac{n}{1+n^2(-1)^n} \to 0$ при $n \to +\infty$. При $n = 2k+1$ $\dfrac{n}{1+n^2 \cdot 0} = n \to +\infty$ при $n \to +\infty$. Это противоречит единственности предела. Следовательно, данный предел не существует.

274. Заметим, что члены последовательности с номерами $90 + 360 \cdot k$ равны 1, а с номерами $270 + 360 \cdot k$ равны (-1). Модуль их разности равен 2 и, стало быть, не может быть сделан сколь угодно малым. Поэтому последовательность расходится. (Можно было сказать также, что последовательность содержит две подпоследовательности, сходящиеся к разным пределам).

275. Подпоследовательность с чётными номерами ($n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$) $\dfrac{n^2-2}{n^2+3}$ сходится к единице, а подпоследовательность с нечётными номерами ($n = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$) $\dfrac{2-n^2}{n^2+3}$ сходится к минус единице. Поэтому предел не существует (последовательность расходится).

276. В данном случае нет неопределённости при вычислении предела. В самом деле, $\sin\dfrac{2\pi n}{3n+1} \to \sin\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \in (0,1)$.

Поэтому $\left(\sin\dfrac{2\pi n}{3n+1}\right)^n \to 0$.

277. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\cos\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)^n \overset{[1^\infty]}{=} e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{x}{\sqrt{n}}-1\right)n} =$

$e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2\sqrt{n}}-1\right)n} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-2\sin^2\frac{x}{2\sqrt{n}}\right)n} =$

$= e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-2(\sin\frac{x}{2\sqrt{n}})^2}{(\frac{x}{2\sqrt{n}})^2}\cdot\frac{x^2}{4}} = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

278. Имеем неопределённость 1^∞. Сведём ко 2-му замечательному пределу:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(2^n+n)-n}{n+2^n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{n}{n+2^n}\right)^n =$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1-\frac{n}{n+2^n}\right)^{-\frac{n+2^n}{n}}\right)^{-\frac{n^2}{n+2^n}} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{n^2}{n+2^n}\right)} = e^0 = 1.$$

279. Имеем неопределённость 1^∞. Сведём вычисление предела ко 2-му замечательному пределу:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right)^{\frac{2n}{n+1}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}} = e^2.$$

280. Заметим, что это неопределённость вида 1^∞. Воспользуемся специальным приёмом, основанным на сведении ко 2-му замечательному пределу:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{7n+2}{n^2+1}\right)^{2n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{7n+2}{n^2+1}\right)^{\frac{n^2+1}{7n+2}}\right)^{\frac{7n+2}{n^2+1}\cdot 2n} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{7n+2}{n^2+1}\cdot 2n} = e^{14}.$$

281. Так как функция $f(x)$ имеет производную в точке a, то она и непрерывна в этой точке, поэтому имеем неопределённость вида 1^{∞}. Раскроем её:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)+f(a)}{f(a)}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{f(a)}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{f(a)}\right)^{\frac{f(a)}{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}}\right)^{\frac{n\left(f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)\right)}{f(a)}}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}e^{\dfrac{n\left(f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)\right)}{f(a)}}=\lim_{n\to+\infty}e^{\dfrac{\left(f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)\right)}{\frac{1}{n}}\cdot\dfrac{1}{f(a)}}$$

$$=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}.$$

282. Рассмотрим два случая.

1) n – чётно, сгруппируем слагаемые попарно (пар будет $n/2$):

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n}\right)+\left(\frac{3}{n}-\frac{4}{n}\right)+...+\left(\frac{n-1}{n}-\frac{n}{n}\right)\right|=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n}{2}\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)\right|=\frac{1}{2};$$

2) n – нечётно, сгруппируем слагаемые попарно (пар будет $(n-1)/2$), в конце останется непарная единица:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n}\right)+\left(\frac{3}{n}-\frac{4}{n}\right)+...+\left(\frac{n-2}{n}-\frac{n-1}{n}\right)+1\right|=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n-1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)+1\right|=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, предел равен $1/2$.

283. Обозначим $S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + ... + \frac{2n-1}{2^n}$, тогда

$$S_n - \frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + ... + \frac{2n-1}{2^n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + ... + \frac{2n-1}{2^n}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{2^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{5}{2^3} - \frac{3}{2^3}\right) + ... + \left(\frac{2n-1}{2^n} - \frac{2n-3}{2^n}\right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}}.$$

Отсюда, умножая на 2, получим

$$S_n = 1 + \underbrace{1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{n-2}}}_{\text{геом. прогрессия}} - \frac{2n-1}{2^n} = 1 + \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n} =$$

$= 3 - \frac{2n+3}{2^n}$. Тогда, возвращаясь к пределу, получим

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(3 - \frac{2n+3}{2^n}\right) = 3,$$

так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$. Докажем это, используя формулу бинома Ньютона:

$$\left|\frac{n}{2^n}\right| = \frac{n}{(1+1)^n} = \frac{n}{1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + ... + 1} < \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2}{n-1} < \varepsilon$$

для любого $\varepsilon > 0$, если $n > 1 + \frac{2}{\varepsilon}$.

284. Обозначим S_n – выражение под знаком предела. В силу очевидного тождества

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \quad k = 1, 2, ...n,$$

имеем:

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Переходя к пределу, получим $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$.

285. Воспользуемся тождеством ($k = \overline{1,n}$):

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right).$$

Применяя тождество к каждому слагаемому, получаем:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 4} + ... - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right).$$

В результате взаимного сокращения промежуточных членов остаётся

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right).$$

Переходя к пределу, окончательно находим

$$\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{1}{4}.$$

286. Заметим, что общий вид каждого слагаемого в сумме: $\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}$, где $k = \overline{1,n}$. Воспользуемся вспомогательным тождеством

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right), \quad k = \overline{1,n}.$$

Тогда получим

$$x_n = \frac{1}{2}\left(\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + ... + \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Переходя теперь к пределу, находим

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}.$$

287. Преобразуем выражение под знаком предела:

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot ...\cdot\sqrt[2^n]{2}) = \lim_{n\to+\infty} 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 2^{1-\frac{1}{2^n}} = 2.$$

288. Поскольку

$$1\cdot2+2\cdot3+...+n(n+1) = 1(1+1)+2(1+2)+3(1+3)+...+n(1+n) =$$
$$= (1+2+3+...+n)+(1^2+2^2+3^2+...+n^2) =$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

то предел равен $1/3$.

289. Для доказательства перепишем неравенство в виде $1 > \left(\frac{10}{11}\right)^n + \left(\frac{9}{11}\right)^n$ и далее воспользуемся тем, что его правая часть монотонно убывая стремится к нулю. Отсюда и следует, что неравенство будет верно для всех достаточно больших n (начиная с некоторого номера).

290. а) Для ответа на вопрос рассмотрим предел отношения: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{100n+200}{0,01n^2}$. Так как этот предел равен 0, то приходим к ответу: второе больше.

б) поскольку $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n}{n^{1000}} = +\infty$, то первое больше;

в) поскольку $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1000^n}{n!} = 0$, то второе больше.

291. Обозначим $S_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n-1} \sin\dfrac{\pi i}{n}$, тогда S_n можно интерпретировать как интегральную сумму для функции $f(x) = \sin(\pi x)$ на отрезке $[0,1]$, и её предел равен интегралу

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int\limits_0^1 \sin(\pi x)dx = \tfrac{1}{\pi}(\cos\pi x)\Big|_1^0 = \frac{2}{\pi}.$$

292. Перепишем x_n в виде $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{i}{n}\right)^p$ и заметим, что это интегральная сумма для функции $f(x) = x^p$ на отрезке $[0,1]$ при разбиении его на n равных частей. Таким образом, переходя к пределу при $n\to+\infty$ получаем определённый интеграл

$$\int_0^1 x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{p+1}.$$

6 СЕМИНАР: Монотонные последовательности. Сходимость монотонной ограниченной последовательности

«Математика — гимнастика ума».
А.В. Суворов (1730–1800) – граф (1789), князь (с 1799), русский полководец, основоположник русской военной теории. Национальный герой России. Генералиссимус (1799), кавалер всех российских орденов своего времени, а также семи иностранных. За всю карьеру полководца из более 60 сражений не проиграл ни одного.

Домашнее задание: 293, 295–298, 300-304, 307–313, 316, 317, 319, 320.

6.1 Монотонные последовательности и их свойства

Начнём с определений видов монотонности у последовательностей. В дальнейшем мы будем рассматривать монотонность функций одной переменной, и у нас появится возможность сравнить эти понятия.

6.1.1 Монотонные последовательности и их свойства. Теорема Вейерштрасса о сходимости монотонной ограниченной последовательности

Опр. 1. Последовательность $\{x_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ называется *возрастающей* (соответственно, *убывающей*), если для любого натурального n выполняется неравенство: $x_{n+1} > x_n$ (соответственно, $x_{n+1} < x_n$).[1]

[1] Т. е. если каждый её член больше (соответственно, меньше) предыдущего члена.

Опр. 2. Последовательность $\{x_n\}$ называется *невозрастающей* (соответственно, *неубывающей*), если $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется: $x_{n+1} \leqslant x_n$ (соответственно, $x_{n+1} \geqslant x_n$).

Опр. 3. Последовательность $\{x_n\}$ называется *монотонной*, если она принадлежит одному из четырёх указанных выше видов. При этом возрастающая и убывающая последовательности называются *строго монотонными*, а невозрастающие и неубывающие – монотонными в *нестрогом смысле* слова.

Пример 96. Монотонные последовательности: $x_n = \frac{1}{n+1}$ – убывающая, $y_n = 2^{\sqrt{n}}$ – возрастающая, $1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, ...$ – неубывающая. Немонотонные последовательности: $x_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$, $y_n = \cos n$, $z_n = (-1)^n = \cos \pi n$ (последняя – знакочередующаяся последовательность). $\square$

Рассмотрим *основные свойства* монотонных последовательностей.

Теоремы о монотонных последовательностях.

Теорема 1 (*о перемене направления монотонности при умножении на минус единицу* (*отрицательное число*)). Если последовательность $\{x_n\}$ – возрастающая, то последовательность $\{-x_n\}$ – убывающая.

Теорема 2 (*о сумме двух возрастающих последовательностей*). Сумма двух (конечного числа) возрастающих последовательстей также является возрастающей последовательностью.

Теорема 3 (*о произведении двух положительных возрастающих последовательностей*). Произведение двух (конечного числа) положительных возрастающих последовательностей является положительной возрастающей последовательностью.

Теорема 4 (*о разной монотонности положительных последовательностей* $\{x_n\}$ и $\{1/x_n\}$). Если последовательность $\{x_n\}$ возрастает и все её члены положительны, то последовательность $\{1/x_n\}$ – убывает.

Теорема 5 (*об односторонней ограниченности монотонных последовательностей*). Если последовательность возрастает (соответственно, убывает), то она ограничена снизу (со-

ответственно, сверху), например, своим первым членом. При этом первый член возрастающей последовательности является её наименьшим элементом, на котором достигается точная нижняя грань. Соответственно, для убывающей последовательности её первый член является её наибольшим элементом, равным точной верхней грани.

Теорема 6 (*о монотонности сложной последовательности вида* $\{f(g(n))\}$).

1) Если последовательность $\{g(n)\}$ возрастает (соответственно, убывает) и функция $f(g)$ возрастает (соответственно, убывает), то сложная последовательность $\{f(g(n))\}$ также возрастает (соответственно, убывает).

2) Если последовательность $\{g(n)\}$ возрастает, а функция $f(g)$ убывает, то последовательность $\{f(g(n))\}$ убывает. Если последовательность $\{g(n)\}$ убывает, а функция $f(g)$ возрастает, то последовательность $\{f(g(n))\}$ убывает.

Теорема 7 (*теорема Вейерштрасса о сходимости монотонной ограниченной последовательности, или Основная теорема теории последовательностей*). Если последовательность $\{x_n\}$ не убывает и ограничена сверху (или не возрастает и ограничена снизу), то она сходится.[1]

Пример 97. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, и найти его, если $\{x_n\}$ задана рекуррентно:

$$x_{n+1} = \frac{2x_n + 1}{3},\ x_1 = \frac{3}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Докажем, что данная последовательность удовлетворяет условиям теоремы Вейерштрасса, т. е. что она монотонна и ограничена. Монотонность (убывание) докажем по индукции. База индукции: $x_2 = \dfrac{4}{3} < \dfrac{3}{2} = x_1$ – верно. Пусть для некоторого $n \geqslant 2$ выполняется $x_n < x_{n-1}$, докажем, что тогда $x_{n+1} < x_n$:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2x_n + 1}{3} - \frac{2x_{n-1} + 1}{3} = \frac{2(x_n - x_{n-1})}{3} < 0,$$

т. е. последовательность монотонно убывает. Ограниченность снизу с очевидностью вытекает из положительности всех членов последовательности. По теореме Вейерштрасса последовательность сходится.

[1] Короче: монотонная ограниченная последовательность сходится.

Обозначим её предел через l и перейдём к пределу в рекуррентном соотношении, задающем последовательность. Получим $l = \dfrac{2l+1}{3}$. Решая это уравнение, находим $l = 1$. $\square$

Теорема 8. Любая числовая последовательность содержит монотонную подпоследовательность.

Монотонная неограниченная последовательность имеет бесконечный предел, равный $+\infty$ для неубывающей и $-\infty$ для невозрастающей последовательности.

6.1.2 Нахождение наименьшего (наибольшего) элементов числовой последовательности

«Учиться никогда не поздно,
хоть бесполезно иногда».

Владимир Поляков (р. 1955) живёт
в Питере, известен под
псевдонимом bazzlan, пишет
ироничные двустишия.

Элемент x_{n_0} называется *наименьшим элементом* последовательности $\{x_n\}$, если при всех натуральных n выполняется условие $x_{n_0} \leqslant x_n$. Обозначение $\min x_n = x_{n_0}$.

Аналогично, член x_{n_0} называется *наибольшим элементом* последовательности $\{x_n\}$, если при всех натуральных n выполняется условие $x_{n_0} \geqslant x_n$. Обозначение $\max x_n = x_{n_0}$.

Наибольший (наименьший) элемент не обязательно единственный. У постоянных последовательностей каждый элемент одновременно является как наибольшим, так и наименьшим. А вот у монотонных (даже ограниченных!) последовательностей наибольший (наименьший) элементы существуют не всегда.

Пример 98. Последовательность $x_n = \operatorname{arctg} n$ ($n \in \mathbb{N}$) не имеет наибольшего элемента. $\square$

Из определения строго монотонной последовательности следует, что разность соседних членов $x_{n+1} - x_n$ сохраняет положительный знак в случае возрастания и отрицательный – в случае убывания. Если последовательность не является моно-

тонной, то знак у этой разности не сохраняется. На исследование знака разности $x_{n+1}-x_n$ опирается приём для нахождения наибольшего (наименьшего) элемента немонотонных последовательностей.

Другие подходы к определению наименьшего (наибольшего) элементов у знакоположительных последовательностей – составлять отношение x_{n+1}/x_n и сравнивать его с единицей. Также можно использовать всевозможные оценки, в частности, основанные на применении неравенств.

Пример 99. [6, № 97] Найти наибольший член последовательности

$$x_n = \frac{\sqrt{n}}{100+n}.$$

Решение. Имеем

$$x_n = \frac{\sqrt{n}}{100+n} = \frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{n}-10)^2+20\sqrt{n}} = \frac{1}{\frac{(\sqrt{n}-10)^2}{\sqrt{n}}+20} \leqslant \frac{1}{20},$$

причём равенство достигается при $n=100$. Следовательно, $\max x_n = x_{100} = 1/20$. $\square$

6.2 Задачи для самостоятельного решения

№293. Используя логическую символику, записать следующее высказывание, а также его отрицание: «последовательность монотонно возрастает».

Решить задачи на доказательство:

№294. Доказать монотонное возрастание последовательности

$$x_n = \frac{n}{2n+1}.$$

№295. Доказать, что не существует номера $N \in \mathbb{N}$, начиная с которого последовательность $x_n = \sin n$ является монотонной.

№296. [6, № 90] Доказать, что монотонная последовательность будет сходящейся, если сходится некоторая её подпоследовательность.

Исследовать на монотонность и ограниченность последовательности ($n \in \mathbb{N}$):

№297. $x_n = \dfrac{n-2}{n+1}$;

№298. $x_n = \operatorname{arcctg}(n^2 + n - 1)$;

№299. $x_n = \sqrt{5^{n^3+1}}$.

Решить задачи, используя теорему о сходимости монотонной ограниченной последовательности:

№300. [6, № 77] Доказать сходимость последовательности ($n \in \mathbb{N}$)

$$x_n = p_0 + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{10^2} + ... + \frac{p_n}{10^n},$$

где p_i $(i = 0, 1, 2, ...)$ – целые неотрицательные числа, не превышающие 9, начиная с p_1.

№301. [6, № 78] Доказать сходимость последовательности

$$x_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdot ... \cdot \frac{n+9}{2n-1}.$$

№302. [6, № 79] Доказать сходимость последовательности

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

№303. [6, № 80] Доказать сходимость последовательности

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

№304. [6, № 81] Обосновать сходимость последовательности, используя метод математической индукции для доказательства её монотонности и ограниченности

$$x_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n}.$$

№305. Обосновать сходимость последовательности и найти её предел, доказав предварительно, что $x_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$, и воспользовавшись этим:

$$x_1 = \sqrt{2},\ x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}},\ x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}\ \ (n \geqslant 3).$$

№306. Доказать, что последовательность $\{2^n/n!\}$ сходится, и найти её предел.

№307. Доказать, что если $a > 0$, то последовательность $\{x_n\}$, определённая рекуррентным соотношением

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad x_1 = a,$$

имеет предел, и он равен $\sqrt{a}$.

№308. [6, № 150] Пусть $a \geq 0$, $b \geq 0$, причём $a \geqslant b$. Определим рекуррентно две числовые последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$:

$$a_0 = a,\ b_0 = b, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},\ \ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Доказать, что эти последовательности сходятся, причём к общему пределу, называемому *арифметико-геометрическим средним* чисел a и b.

№309. [6, № 69] Доказать, что последовательность чисел $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ монотонно возрастает и ограничена сверху, а последовательность $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ монотонно убывает и ограничена снизу ($n \in \mathbb{N}$). Отсюда вывести, что эти последовательности имеют общий предел

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e,$$

причём при любом $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Указание. Составить отношения $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$, $\dfrac{y_n}{y_{n-1}}$ и с помощью неравенства Бернулли $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$ ($n \in \mathbb{N}$, $x > -1$) показать, что первое из отношений при любых натуральных n больше единицы, а второе (при $n > 1$) – меньше.

№310. [**?**, с. 28] Доказать сходимость последовательности

$$x_n = \frac{n!}{(2n+1)!!}.$$

№311. [6, № 74] Доказать неравенство

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

№312. [6, № 75а] Доказать неравенство

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

№313. [6, № 70] Доказать, что если $n \in \mathbb{N}$, то

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n}.$$

При каких значениях показателя n выражение $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ будет отличаться от числа e меньше, чем на 0,001?

№314. [6, № 72] Зная, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, доказать, что

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}\right)=e.$$

Найти наибольший член последовательности ($n\in\mathbb{N}$)**:**

№315. [6, № 96] $x_n=\dfrac{n^2}{2^n}$.

№316. [6, № 98] $x_n=\dfrac{1000^n}{n!}$.

Найти наименьший член последовательности ($n\in\mathbb{N}$)**:**

№317. [6, № 99] $x_n=n^2-9n-100$.

№318. [6, № 100] $x_n=n+\dfrac{100}{n}$.

Разные задачи, связанные с монотонностью последовательностей:

№319. Может ли сумма двух немонотонных последовательностей являться сторого монотонной последовательностью?

№320. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена и имеет вид $x_n=y_n+z_n$, где $\{y_n\}$ монотонно возрастает, а $\{z_n\}$ монотонно убывает. Верно ли, что $\{x_n\}$ сходится?

6.3 Ответы и решения

293. Последовательность монотонно возрастает $\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall n \in \mathbb{N}$ $x_n < x_{n+1}$. Последовательность не является монотонно возрастающей $\overset{def}{\Leftrightarrow} \exists n \in \mathbb{N}$ $x_n \geqslant x_{n+1}$.

294. Для возрастания последовательности достаточно доказать, что $x_n < x_{n+1}$, или $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$, при всех натуральных n. Покажем, что последнее неравенство выполняется:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{(2(n+1)+1)n} > 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+3)n} > 1 \;\Leftrightarrow$$

$\frac{2n^2+3n+1}{2n^2+3n} > 1$ – верно при всех натуральных n, что и требовалось показать.

295. Воспользуемся формулой разности синусов:

$$\sin(n+1) - \sin n = 2\sin\frac{1}{2} \cdot \cos\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Но $\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)$ не сохраняет один и тот же знак при $n \to +\infty$. Следовательно, последовательность не является монотонной.

296. Для определённости будем считать, что $\{x_n\}$ – возрастающая и $\{x_{n_k}\}$ – её сходящаяся подпоследовательность, т. е. $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = a$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $K = K(\varepsilon)$: $\forall k > K$ в силу монотонности имеем

$$a - \varepsilon < x_{n_k} \leqslant x_{n_k+1} \leqslant ... \leqslant x_{n_{k+1}} \leqslant x_{n_{k+1}+1} \leqslant ... \leqslant a + \varepsilon,$$

откуда $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \;\forall\; n > n_k$, где $k > K(\varepsilon)$, что и требовалось доказать.

297. Во-первых, при любом натуральном n имеем: $x_n = \frac{(n+1)-3}{n+1} = 1 - \frac{3}{n+1} < 1$, т. е. последовательность ограничена сверху. Во-вторых, так как разность последующего и предыдущего членов

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n-1}{n+2} - \frac{n-2}{n+1} = \frac{3}{(n+1)(n+2)} > 0$$

при всех $n \in \mathbb{N}$, то последовательность возрастает, а значит, она ограничена снизу своим первым членом $x_1 = -\dfrac{1}{2}$. Итак, поскольку последовательность ограничена и сверху, и снизу $-\dfrac{1}{2} \leq x_n < 1$, то она по определению является ограниченной.

298. Последовательность ограничена, так как $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$, $x \in \mathbb{R}$. Далее, последовательность $g(n) = n^2 + n - 1$ возрастает как сумма двух возрастающих последовательностей n^2 и $n-1$, а функция $f(g) = \operatorname{arcctg} g$ убывает, то их суперпозиция – последовательность $\{\operatorname{arcctg}(n^2 + n - 1)\}$ – убывает.

299. Так как последовательность $h(n) = n^3 + 1$ возрастает, функция $g(h) = 5^h$ возрастает и функция $f(g) = \sqrt{g}$ также возрастает, то композиция трёх возрастающих функций образует возрастающую последовательность $\{\sqrt{5^{n^3+1}}\}$. В силу возрастания последовательность ограничена снизу, например, своим первым членом. Сверху последовательность не ограничена, так как для любого сколь угодно большого числа E найдётся номер $N(E)$ такой, что, начиная с этого номера, выполняется неравенство $\sqrt{5^{n^3+1}} > E$. Действительно, решим последнее неравенство: $5^{n^3+1} > E^2 \Leftrightarrow n^3 + 1 > \log_5 E^2 \Leftrightarrow n^3 > \log_5 E^2 - 1 \Leftrightarrow n > \sqrt[3]{\log_5 E^2 - 1}$. Например, можно взять $N(E) = \left[\sqrt[3]{\log_5 E^2 - 1}\right] + 1$.

300. Докажем, что последовательность x_n является неубывающей:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{p_{n+1}}{10^{n+1}} \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} \geqslant x_n.$$

Кроме того, x_n ограничена сверху:

$$x_n < p_0 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + ... + \frac{9}{10^n} + ... = p_0 + \frac{9/10}{1 - 1/10} = p_0 + 1.$$

Поэтому она сходится.

301. Рассмотрим отношение

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdot ... \cdot \frac{n+9}{2n-1} \cdot \frac{(n+1)+9}{2(n+1)-1}}{\frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdot ... \cdot \frac{n+9}{2n-1}} =$$

$$= \frac{n+10}{2n+1} = \frac{(n+\frac{1}{2})+\frac{19}{2}}{2(n+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{19}{2}}{2n+1}.$$

Поскольку последовательность $\dfrac{19/2}{2n+1}$ стремится к 0, то начиная с некоторого номера (его при желании можно найти) будет выполняться условие $\dfrac{1}{2} + \dfrac{19/2}{2n+1} < 1$, а это означает, что последовательность $\{x_n\}$ убывает. Так как $x_n > 0$ (ограниченность снизу), то $\{x_n\}$ сходится.

302. Во-первых, очевидно, что все члены последовательности положительны (т. е. она ограничена снизу числом 0). Во-вторых, для доказательства монотонного убывания последовательности рассмотрим отношение x_{n+1}/x_n и покажем, что оно меньше 1 при всех натуральных n (в общем случае было бы достаточно, чтобы это выполнялось, начиная с некоторого номера):

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2^{n+1}} < 1.$$

303. Возрастание последовательности следует из неравенства: $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1 + \dfrac{1}{2^{n+1}} > 1$. Докажем ограниченность двумя способами.

1-й способ. Воспользуемся неравенством Коши:

$$\sqrt[n]{(1+\tfrac{1}{2})(1+\tfrac{1}{2^2})\cdot\ldots\cdot(1+\tfrac{1}{2^n})} \leqslant \frac{(1+\frac{1}{2})+\ldots+(1+\frac{1}{2^n})}{n}.$$

Тогда

$$x_n = (1+\tfrac{1}{2})(1+\tfrac{1}{2^2})\cdot\ldots\cdot(1+\tfrac{1}{2^n}) \leqslant \left(\frac{n+(\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n})}{n}\right)^n <$$

$$< \left(\frac{n+(\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots)}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e.$$

2-й способ. Воспользуемся предварительным логарифмированием. Ограниченность $\{x_n\}$ сверху следует из неравенств:

$$\ln x_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right) + ... + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) <$$
$$< \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n} + ... = 1,$$

откуда $x_n < e$.

304. 1) Докажем возрастание последовательности (по индукции). При $n = 1$ имеем $x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} > \sqrt{2} = x_1$ – верно. Предположим, что при некотором $n = k$ верно неравенство $x_{k+1} > x_k$ и покажем, что тогда $x_{k+2} > x_{k+1}$. Действительно, $x_{k+2} = \sqrt{2+x_{k+1}} > \sqrt{2+x_k} = x_{k+1}$. В силу произвольности k монотонность доказана.

2) Докажем, что последовательность ограничена сверху числом 2 (по индукции), т. е. при всех $n \in \mathbb{N}$ $x_n < 2$. При $n = 1$ имеем $x_1 = \sqrt{2} < 2$ – верно. Предположим, что при некотором $n = k$ верно неравенство $x_k < 2$ и покажем, что $x_{k+1} < 2$. В самом деле, $x_{k+1} = \sqrt{2+x_k} < \sqrt{2+2} = 2$, что и требовалось доказать. Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ сходится.

305. Докажем по индукции, что $x_n = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$. При $n = 1$ имеем: $x_1 = 2\cos\dfrac{\pi}{4}$ – верно. Предположим, что $x_n = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$, тогда

$$x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \sqrt{2\left(1+\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} =$$

$$= \sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{2^{n+2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}},$$

отсюда следует сходимость последовательности к пределу

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2\cdot\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = 2.$$

Доказанный результат можно записать в виде:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}} = 2.$$

Можно было найти предел последовательности, перейдя в рекуррентном равенстве к пределу.

306. Последовательность $\{x_n\}$ монотонно убывает, так как

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{2^n}{n!} = \frac{2}{n+1} < 1$$

при $n > 1$. При этом последовательность ограничена снизу, поскольку $x_n > 0$. По теореме о монотонной ограниченной последовательности она сходится. Обозначим её предел a. Воспользуемся тем, что $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{2}{n+1}$, откуда $x_{n+1} = \dfrac{2}{n+1}x_n$. Переходя к пределу в рекуррентном равенстве, получим $a = 0 \cdot a$, т. е. $a = 0$.

307. Так как $a > 0$ и $x_1 > 0$, то $x_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Из неравенства Коши имеем: $x_{n+1} = \dfrac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2} \geqslant \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}$. Следовательно, $\{x_n\}$ – ограничена снизу. Поскольку $x_n \geqslant \sqrt{a}$, то $\frac{a}{x_n} \leqslant \sqrt{a}$, поэтому $x_{n+1} = \dfrac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2} \leqslant \dfrac{x_n + \sqrt{a}}{2} \leqslant \dfrac{x_n + x_n}{2} = x_n$. Это значит, что последовательность $\{x_n\}$ – не возрастает. Так как последовательность ограничена снизу и не возрастает, то она сходится.

Обозначим искомый предел $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = c$. Так как $x_n \geqslant \sqrt{a}$, то $c \geqslant \sqrt{a}$. Воспользуемся свойством, что для любой сходящейся последовательности $\{a_n\}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1}$, и перейдём к пределу в рекуррентном соотношении:

$$\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Получим $c = \dfrac{1}{2}\left(c + \dfrac{a}{c}\right)$, откуда находим $c^2 = a$ и, так как $c \geqslant 0$, то $c = \sqrt{a}$.

308. Из условия следует, что $a_n \geqslant 0$, $b_n \geqslant 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Используя неравенство Коши $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$ $(a \geqslant 0,\ b \geqslant 0)$, получим:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \geqslant \sqrt{a_n b_n} = b_{n+1}.$$

Поскольку $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geqslant \sqrt{b_n^2} = b_n$, то $\{b_n\}$ –

неубывающая последовательность. Далее, так как $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \leqslant \dfrac{a_n + a_n}{2} = a_n$, то $\{a_n\}$ – невозрастающая последовательность. Кроме того, они ограничены: $b_n \leqslant a_n \leqslant a_1$ ($\{b_n\}$ – ограничена сверху), $a_n \geqslant b_n \geqslant b_1$ ($\{a_n\}$ – ограничена снизу). Поэтому по теореме о сходимости монотонной ограниченной последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ – сходятся. Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = B$. Переходя к пределу в равенстве $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, получим: $A = \dfrac{A+B}{2} \Leftrightarrow A = B$.

Обозначим этот общий предел $A = B = M(a, b)$. Данная функция была впервые исследована Гауссом. Она играет важную роль в теории эллиптических функций; более того, Гаусс показал, как вся эта теория может быть основана на этой функции.

309. Для доказательства монотонности покажем, что при $n \in \mathbb{N}$ ($n > 1$) выполнены неравенства $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} > 1$, $\dfrac{y_n}{y_{n-1}} < 1$:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}} = \left(\frac{1+\dfrac{1}{n+1}}{1+\dfrac{1}{n}}\right)^{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \left(\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} >$$

[применим неравенство Бернулли] $> \left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) \cdot \dfrac{n+1}{n} = 1;$

$$\frac{y_n}{y_{n-1}} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n}} = \left(\frac{1+\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{1}{n-1}}\right)^{n} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right)^{n} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n}} \cdot \frac{n+1}{n} =$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n}} \cdot \frac{n+1}{n} < \frac{1}{1+\frac{n}{n^2-1}} \cdot \frac{n+1}{n} =$$

$$= \frac{(n^2-1)(n+1)}{(n^2+n-1)n} = \frac{n^3+n^2-n-1}{n^3+n^2-n} < 1.$$

Покажем теперь ограниченность $\{x_n\}$ сверху, а $\{y_n\}$ – снизу. Это следует из неравенств: $x_n < y_n < y_{n-1} < ... < y_1$ и $y_n > x_n > x_{n-1} > ... > x_1$, верных при всех $n \in \mathbb{N}$. Наконец, $0 < y_n - x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} < \frac{e}{n} \to 0$ при $n \to +\infty$. Отсюда $(y_n - x_n) \to 0$ при $n \to +\infty$. И так как предел $\{x_n\}$ равен e, то, следовательно, предел $\{y_n\}$ также равен этому числу.

310. Покажем, что данная последовательность является монотонной и ограниченной.

1) Для исследования на монотонность рассмотрим отношение

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)! \cdot (2n+1)!!}{(2n+3)!! \cdot n!} = \frac{n+1}{2n+3} < \frac{n+1}{2n+2} = \frac{1}{2}.$$

Поскольку $\frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{1}{2}$, то $x_{n+1} < \frac{1}{2}x_n < x_n$, т. е. последовательность строго убывает.

2) Ограниченность снизу очевидна: $x_n > 0$. Следовательно, последовательность сходится.

311. 1) Докажем левое неравенство методом математической индукции. При $n = 1$ имеем: $\frac{1}{e} < 1 < \frac{e}{2}$ – верно. Предположим, что неравенство выполнено при некотором натуральном n, и докажем, что тогда оно выполнено и при следующем значении $(n+1)$:

$$(n+1)! = n!(n+1) > \left(\frac{n}{e}\right)^n (n+1) = \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \cdot \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n (n+1)}{\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}} =$$

$$= \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \cdot \frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n} > \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1},$$

что и требовалось доказать.

2) Докажем правое неравенство. Воспользуемся, например, неравенством $(n \in \mathbb{N})$

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n = e\left(\frac{n}{2}\right)^n \cdot \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)^n}{e(\frac{n}{2})^n} = e\left(\frac{n}{2}\right)^n \cdot \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e} < e\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

312. Воспользуемся доказанным выше неравенством

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Прологарифмировав это неравенство по основанию e, получим

$$n \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1) \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

откуда, разбивая неравенство на левое и правое, получаем доказываемое неравенство.

313. Воспользуемся неравенством $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > e$. Тогда

$$0 < e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} < \frac{e}{n} < \frac{3}{n} < \frac{1}{1000},$$

откуда $n > 3000$.

314. С одной стороны, с помощью бинома Ньютона имеем:

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + C_n^1 \cdot \frac{1}{n} + C_n^2 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + C_n^3 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3 + ...$$

$$... + C_n^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} + C_n^n\left(\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + ...$$

$$+\frac{n(n-1)\cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} + ... + \frac{n(n-1)(n-2)...2 \cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n}$$

[отбросим последние слагаемые]

$$> 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + ...$$

$$... + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

Устремим в неравенстве $n \to +\infty$:

$$e > 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{k!} = y_k.$$

Это неравенство справедливо при $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Взяв вместо k значение n, получим

$$y_n = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} < e.$$

С другой стороны, имеем оценку

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + ...$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} + ... + \frac{n(n-1)(n-2)...2 \cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} =$$
$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + ...$$
$$... + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)...\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) <$$

[так как выражения в скобках меньше единицы]

$$< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} = y_n.$$

Итак, при любом натуральном n имеем неравенство

$$x_n < y_n < e.$$

Поскольку $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, то, переходя к пределу при $n \to +\infty$, в силу принципа двусторонней ограниченности, получим, что $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = e$.

315. Поскольку

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^2 \cdot 2^n}{2^{n+1} n^2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 < 1$$

при $n > 2$, то последовательность монотонно убывает при $n > 2$. Следовательно, наибольший член содержится среди элементов x_1, x_2, x_3. Найдём $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 9/8$, поэтому $x_{\max} = x_3 = 9/8$.

316. Составим отношение $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{1000}{n+1}$ и сравним его с единицей. Определяем, что при $n > 999$ последовательность монотонно убывает, а при $n < 999$ – возрастает. Следовательно,

$$\max x_n = x_{1000} = \frac{1000^{1000}}{1000!}.$$

317. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - 9x - 100$ и найдём её абсолютный минимум $x_{\text{в}} = -\frac{b}{2a} = 4,5$. Следова-

тельно, ближайшие целые значения $n_1 = 4$, $n_2 = 5$, причём $x_4 = x_5 = -120$.

318. *1-й способ.* Оценим знак разности $x_{n+1} - x_n$:

$$x_{n+1} - x_n = n + 1 + \frac{100}{n+1} - \left(n + \frac{100}{n}\right) = \frac{n^2 + n - 100}{n(n+1)} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$n^2 + n - 100 \geqslant 0$. Решим неравенство в натуральных числах. Для этого вначале решим обычное квадратное неравенство (в действительных числах): $x^2 + x - 100 \geqslant 0$, $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{401}}{2}$, при этом $x_1 < 0$, $x_2 \approx 9, ...$ Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает, начиная с $n = 10$. Поэтому $n_{min} = 10$ и $x_{10} = 10 + \dfrac{100}{10} = 20$.

2-й способ. Воспользуемся неравенством Коши: $x_n = n + \dfrac{100}{n}$ $\geqslant 2\sqrt{n \cdot \dfrac{100}{n}} = 20$ и достигается при условии $n = \dfrac{100}{n}$, т. е. при $n = 10$.

319. Да, например, $x_n = (-1)^n + n$, $y_n = (-1)^{n+1}$, $x_n + y_n = n$. Докажите, что $\{x_n\}$ – немонотонная.

320. Не обязательно. Приведём два примера.

а) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $y_n = n + \dfrac{(-1)^n}{n}$, $z_n = -n$. Тогда $\{x_n\}$ сходится.

б) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{10}$, $y_n = n + \dfrac{(-1)^n}{10}$, $z_n = -n$. Тогда $\{x_n\}$ расходится.

7 СЕМИНАР: Критерий Коши и теорема сравнения при исследовании сходимости (расходимости) числовой последовательности. Теорема Штольца

«Руководить — это значит не мешать хорошим людям работать».

Пётр Капи́ца (1894–1984), советский инженер, физик, академик АН СССР, лауреат Нобелевской премии по физике (1978).

Домашнее задание: 321–326, 329, 330, 332–334, 336, 337, 339, 341–344, 346–351.

Как можно исследовать числовую последовательность на сходимость? Во-первых, можно попытаться вычислить предел и, если он окажется конечным числом, сделать вывод о сходимости последовательности. Во-вторых, если предел вычислить затруднительно, но есть предположение, чему он равен, то можно попробовать воспользоваться определением предела последовательности (редко используемый случай). Но оказывается, что есть ещё один способ выяснить, сходится ли последовательность, и даже не зная значения предела. Этот способ – использование критерия Коши сходимости числовой последовательности. Рассмотрим его.

7.1 Критерий Коши сходимости (расходимости) числовой последовательности

Теорема 1 (*критерий Коши сходимости числовой последовательности*)[1]. Последовательность $\{x_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда она удовлетворяет *условию Коши*:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall\, n \geqslant n_0,\ \forall\, p \in \mathbb{N}\ \ |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

[1] Термин «критерий» означает «необходимое и достаточное условие».

В этом случае последовательность называют *фундаментальной* (последовательностью Коши).[1] Иными словами, фундаментальная последовательность – это последовательность, в которой для любого наперёд заданного расстояния ε найдётся такой элемент x_{n_0}, расстояние от которого до любого из следующих за ним элементов не превышает заданного. Для последовательностей действительных чисел понятия фундаментальной и сходящейся последовательностей эквивалентны.

Ещё раз подчеркнём, что в формулировке критерия Коши сходимости последовательности, в отличие от определения её предела, отсутствует само предельное значение последовательности. Рассмотрим пример задачи, где для доказательства сходимости последовательности, не находя её предела, удобно применить критерий Коши.

Пример 100. [6, № 85] Доказать сходимость последовательности

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}.$$

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся зависящий от него номер $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что $\forall n > N$ и $\forall p \in \mathbb{N}$ будет справедливо неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$. Рассмотрим модуль разности

$$|x_{n+p} - x_n| = \left| \left(1 + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + ... + \frac{1}{(n+p)^2}\right) - \right.$$

$$\left. - \left(1 + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2}\right)\right| = \left|\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + ... + \frac{1}{(n+p)^2}\right| =$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + ... + \frac{1}{(n+p)^2}.$$

Воспользовавшись вспомогательным неравенством

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \quad (k = 2, 3, ..),$$

получим оценку сверху:

$$|x_{n+p} - x_n| < \frac{1}{(n+1)n} + \frac{1}{(n+2)(n+1)} + ... + \frac{1}{(n+p)(n+p-1)} <$$

[1] В курсе функционального анализа пространство, в котором каждая фундаментальная последовательность сходится к элементу этого же пространства, называется *полным*.

$$< \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + ... + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.$$

Неравенство $1/n < \varepsilon$ верно при $n > 1/\varepsilon$. Поэтому, начиная с номера $[1/\varepsilon] + 1$, сразу для всех натуральных p выполняется неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$, т. е. выполнено необходимое и достаточное условие сходимости последовательности. □

Так как критерий означает необходимое и достаточное условие, то если это условие нарушается, то это автоматически означает расходимость числовой последовательности. Составим отрицание условия Коши и получим критерий Коши расходимости последовательности:

Теорема 2 (*критерий Коши расходимости числовой последовательности*). Последовательность $\{x_n\}$ расходится тогда и только тогда, когда не выполнено условие Коши:

$$\exists\, \varepsilon > 0 :\ \forall\, n_0 \in \mathbb{N}\ \ \exists\, n \geqslant n_0,\ \exists p = p(n) \in \mathbb{N} :\ |x_{n+p} - x_n| \geqslant \varepsilon.$$

Здесь условие $\forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists\ n \geqslant n_0$ можно понимать как «для сколь угодно большого n». Рассмотрим пример.

Пример 101. [6, № 88] Доказать расходимость последовательности

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}.$$

Доказательство. Достаточно показать, что найдётся $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall N \in \mathbb{N}$ (сколь угодно большого) найдутся натуральный номер $n > N$ и натуральное p такие, что будет справедливо неравенство $|x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon_0$. Оценим модуль разности снизу:

$$|x_{n+p} - x_n| = \left|\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{n+p}\right) -\right.$$

$$\left. - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+p}\right| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+p} > \frac{p}{n+p}.$$

Тогда, каким бы большим ни взять n, всегда можно выбрать, например, $p = n$, и получить $|x_{n+p} - x_n| > \dfrac{n}{2n} = \dfrac{1}{2}$. Возьмём в качестве ε_0 любое число из интервала $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, например, $\dfrac{1}{3}$. Итак, нашлось $\varepsilon_0 = 1/3$ такое, что для любого сколь угодно большого $n \in \mathbb{N}$, выбирая $p = n$, получим, что справедливо неравенство $|x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon_0$. Это доказывает расходимость последовательности. $\square$

7.2 Теорема сравнения при исследовании сходимости числовой последовательности

Теорема 3 (*теорема сравнения*). Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – две числовые последовательности с неотрицательными членами ($x_n \geqslant 0$, $y_n \geqslant 0$). Если, начиная с некоторого номера n_0, выполняется неравенство $x_n \leqslant y_n$, то:
1) из сходимости $\{y_n\}$ следует сходимость $\{x_n\}$;
2) из расходимости $\{x_n\}$ следует расходимость $\{y_n\}$.

Рассмотрим пример на применение теоремы сравнения.

Пример 102. Доказать расходимость последовательности

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Решение. Достаточно доказать, что найдётся $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall N \in \mathbb{N}$ (сколь угодно большого) найдутся натуральный номер $n > N$ и натуральное p такие, что будет справедливо неравенство $|x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon_0$. Оценим модуль разности: $|x_{n+p} - x_n| =$

$$= \left|\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n+p}}\right) - \right.$$

$$\left. - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n+p}} > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+p} >$$

$> \dfrac{p}{n+p}$. Тогда, каким бы большим ни взять n, всегда можно выбрать, например, $p = n$, и получить $|x_{n+p} - x_n| > \dfrac{n}{2n} = \dfrac{1}{2}$. Возьмём в качестве ε_0 любое число из интервала $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, например, $\dfrac{1}{3}$.

Итак, нашлось $\varepsilon_0 = 1/3$ такое, что для любого сколь угодно большого $n \in \mathbb{N}$, выбирая $p = n$, получим, что справедливо неравенство $|x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon_0$, что доказывает расходимость последовательности. $\square$

7.3 Раскрытие неопределённостей $\frac{\infty}{\infty}$ с помощью теоремы Штольца

«Наука движется, и скоро
мы обойдёмся без себя».
Владимир Поляков (р. 1955) живёт
в Питере, известен под
псевдонимом bazzlan, пишет
ироничные двустишия. Это
двустишие посвящено
искусственному интеллекту.

Теорема (Што́льца).[1] Пусть $\{x_n\}$ – некоторая последовательность, а последовательность $\{y_n\} \to +\infty$, причём, начиная с некоторого номера, $y_{n+1} > y_n$ (т. е. возрастает), тогда

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}},$$

если только предел справа существует (конечный или бесконечный). Эту теорему называют дискретным аналогом правила Лопиталя и используют для раскрытия неопределённостей вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Рассмотрим пример на применение теоремы Штольца.

Пример 103. Вычислить предел последовательности

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + ... + \frac{n-1}{n^2} \right).$$

Решение. Перепишем предел в виде

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1 + 2 + 3 + ... + (n-1)}{n^2}$$

[1] Теорема названа в честь опубликовавшего в 1885 году её доказательство австрийского математика Отто Штольца.

и положим $x_n = 1 + 2 + 3 + ... + (n-1)$, $y_n = n^2$. Условия теоремы выполняются. Применяя теорему, получим

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+2+3+...+(n-1)}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n^2-(n-1)^2} = \frac{1}{2}. \square$$

7.4 Средние величины $x_1, x_2, ..., x_n$ имеют тот же предел, что и сама последовательность $\{x_n\}$

Пусть даны n положительных действительных чисел x_1, x_2, $..., x_n$. Напомним наиболее известные средние величины:

$$A_n = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \quad \text{(среднее арифметическое)},$$

$$G_n = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n} \quad \text{(среднее геометрическое)},$$

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}} \quad \text{(среднее гармоническое)},$$

$$S_n = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}} \quad \text{(среднее квадратичное)}.$$

Ранее мы уже вводили понятие *среднего степенно́го порядка* p ($p \in \mathbb{R}$) для чисел $x_i > 0$, $i = \overline{1,n}$, при $p \neq 0$:

$$V_p(x_1, ..., x_n) = \left(\frac{x_1^p + x_2^p + ... + x_n^p}{n} \right)^{\frac{1}{p}},$$

где $V_0 = \lim\limits_{p\to 0} V_p(x_1, ..., x_n) = G_n$. Справедлива теорема.

Теорема. Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к (конечному) пределу a, то при любом $p \in \mathbb{R}$ среднее степенное сходится к тому же пределу:

$$\lim_{n\to+\infty} V_p(x_1, ..., x_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n = a.$$

В частности, последовательности средних $\{A_n\}$, $\{G_n\}$, $\{H_n\}$, $\{S_n\}$ сходятся к пределу a.

7.5 Задачи для самостоятельного решения

Используя критерий Коши, доказать сходимость последовательности:

№321. [6, № 83] $x_n = \dfrac{\sin 1}{2} + \dfrac{\sin 2}{2^2} + ... + \dfrac{\sin n}{2^n}$;

№322. $x_n = \sin\dfrac{1}{2} + \sin\dfrac{1}{2^2} + ... + \sin\dfrac{1}{2^n}$;

Указание: воспользоваться неравенством $|\sin x| \le |x|$ $(x \in \mathbb{R})$.

№323. $x_n = \arcsin 1 + \arcsin\dfrac{1}{2^2} + \arcsin\dfrac{1}{3^2} + ... + \arcsin\dfrac{1}{n^2}$;

№324. [6, № 84] $x_n = \dfrac{\cos(1!)}{1\cdot 2} + \dfrac{\cos(2!)}{2\cdot 3} + ... + \dfrac{\cos(n!)}{n(n+1)}$;

№325. $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\cos(2k+3)}{k(k+2)}$;

№326. $x_n = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{1\cdot 2} + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2\cdot 3} + ... + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}$;

Указание: воспользоваться $|\operatorname{arctg} x| \le |x|$ $(x \in \mathbb{R})$.

№327. [6, № 82] $x_n = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + ... + a_n q^n$, где $|a_k| < M$ $(k = 0, 1, 2, ...)$, $|q| < 1$.

Указание: воспользоваться тем, что

$$|q|^{n+1} + |q|^{n+2} + ... + |q|^{n+p} < |q|^{n+1} + |q|^{n+2} + ... = \frac{|q|^{n+1}}{1-|q|}.$$

№328. Последовательность $\{x_n\}$ такова, что $|x_{n+1} - x_n| < C\alpha^n$ при всех $n \in \mathbb{N}$, где $0 < \alpha < 1$. Доказать, что $\{x_n\}$ сходится.

Используя критерий Коши, доказать расходимость последовательности:

№329. $x_n = \arcsin 1 + \arcsin\dfrac{1}{2} + \arcsin\dfrac{1}{3} + ... + \arcsin\dfrac{1}{n}$.

Указание: воспользоваться $|\arcsin x| \geqslant |x|$ $(|x| \leqslant 1)$.

№330. $x_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$;

№331. $x_n = \dfrac{1}{\ln 2} + \dfrac{1}{\ln 3} + ... + \dfrac{1}{\ln n}$ $(n = 2, 3, ...)$;

№332. $x_n = \dfrac{1}{\lg 2} + \dfrac{1}{\lg 3} + ... + \dfrac{1}{\lg n}$ $(n = 2, 3, ...)$;

№333. $x_n = \dfrac{1}{\ln^3 2} + \dfrac{1}{\ln^3 3} + \dfrac{1}{\ln^3 4} + ... + \dfrac{1}{\ln^3 n}$ $(n \geqslant 2)$;

№334. $x_n = \sin 1 + \sin \dfrac{1}{2} + \sin \dfrac{1}{3} + ... + \sin \dfrac{1}{n}$;

№335. $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin \dfrac{1}{\sqrt{k}}$;

№336. $x_n = \sin 1 + \sin \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} + \sin \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} + ... + \sin \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$;

№337. $x_n = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{\ln 2} + \operatorname{arctg} \dfrac{1}{\ln 3} + ... + \operatorname{arctg} \dfrac{1}{\ln n}$ $(n = 2, 3, ...)$.

Исследовать сходимость числовой последовательности:

№338. $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$;

№339. $x_n = \dfrac{n \cdot \sin \frac{\pi n}{2} + 3}{5n - 2}$.

№340. Пользуясь критерием Коши, доказать, что последовательность:

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + ... + \frac{1}{n^\alpha}$$

а) сходится при $\alpha \geq 2$; б) расходится при $\alpha \leq 1$.

№341. Существует ли такое натуральное число n, при котором элемент числовой последовательности

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + ...}}}}$$

больше 6^{1010}?

№342. [6, № 86] Говорят, что последовательность $\{x_n\}$, $n = 1, 2, ...$, имеет *ограниченное изменение*, если $\exists\, C$:

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + ... + |x_n - x_{n-1}| < C \quad (n = 2, 3, ...)$$

Доказать, что последовательность с ограниченным изменением сходится. Построить пример сходящейся последовательности, не имеющей ограниченного изменения.

Используя теорему Штольца, решить задачи:

Вычислить пределы последовательностей:

№343. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+2^2+3^2+...+n^2}{n^3}$;

№344. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1\cdot 1!+2\cdot 2!+...+n\cdot n!}{(n+1)!}$;

№345. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+...+\sqrt[n]{n}}{n}$;

№346. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$;

№347. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln 2+\ln 3+...+\ln n}{n^2}$.

№348. Доказать, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^n}{n}=+\infty$ при $a>1$.

№349. Доказать, что если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел (конечный или бесконечный), то тот же предел имеет и последовательность средних арифметических $A_n=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+...+x_n),\ n\in\mathbb{N}$:

$$\lim_{n\to+\infty}A_n=\lim_{n\to+\infty}x_n.$$

№350. Известно, что если $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$, то

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}=a.$$

Привести пример, показывающий, что обратное утверждение неверно.

Решить задачи, используя $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdot...\cdot x_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$**:**

№351. [6, № 141] Доказать, что если $x_n>0$, то

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n-1}}$$

в предположении, что предел справа существует.

№352. [6, № 142] Доказать, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$.

Указание: воспользоваться результатом предыдущей задачи.

7.6 Ответы и решения

321. Достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся зависящий от него номер $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что при всех $n > N$ и всех натуральных p будет справедливо неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$. Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$ и оценим модуль разности: $|x_{n+p} - x_n| =$

$$= \left| \left(\frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + ... + \frac{\sin n}{2^n} + \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + ... + \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\sin 1}{2} + ... + \frac{\sin n}{2^n} \right) \right| =$$

$$= \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + ... + \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} \right| + \left| \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} \right| + ... + \left| \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}} \right| \leqslant$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + ... + \frac{1}{2^{n+p}} < \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + ... + \frac{1}{2^{n+p}} + ... = \frac{1}{2^n}.$$

Неравенство $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ верно при $n > -\log_2 \varepsilon$, поэтому, начиная с номера $[-\log_2 \varepsilon]+1$, сразу для всех $p \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$, т. е. выполнено необходимое и достаточное условие сходимости последовательности.

322. Достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся зависящий от него номер $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что при всех $n > N$ и всех натуральных p будет справедливо неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$. Оценим модуль разности: $|x_{n+p} - x_n| =$

$$= \left| \left(\sin \frac{1}{2} + \sin \frac{1}{2^2} + ... + \sin \frac{1}{2^n} + \sin \frac{1}{2^{n+1}} + ... + \sin \frac{1}{2^{n+p}} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\sin \frac{1}{2} + ... + \sin \frac{1}{2^n} \right) \right| = \left| \sin \frac{1}{2^{n+1}} + \sin \frac{1}{2^{n+2}} + ... + \sin \frac{1}{2^{n+p}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \sin \frac{1}{2^{n+1}} \right| + \left| \sin \frac{1}{2^{n+2}} \right| + ... + \left| \sin \frac{1}{2^{n+p}} \right| \leqslant$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + ... + \frac{1}{2^{n+p}} < \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + ... + \frac{1}{2^{n+p}} + ... = \frac{1}{2^n}.$$

Неравенство $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ верно при $n > -\log_2 \varepsilon$, поэтому, начиная с номера $[-\log_2 \varepsilon]+1$, сразу для всех $p \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$, т. е. выполнено необходимое и достаточное условие сходимости последовательности.

323. Докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся зависящий от него номер $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что $\forall n > N$ и $\forall p \in \mathbb{N}$ будет справедливо неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$. Имеем: $|x_{n+p} - x_n| =$

$$= \left|\arcsin \frac{1}{(n+1)^2} + \arcsin \frac{1}{(n+2)^2} + ... + \arcsin \frac{1}{(n+p)^2}\right| =$$

$$= \arcsin \frac{1}{(n+1)^2} + \arcsin \frac{1}{(n+2)^2} + ... + \arcsin \frac{1}{(n+p)^2} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{\arcsin \frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} + ... + \frac{1}{(n+p)^2} \cdot \frac{\arcsin \frac{1}{(n+p)^2}}{\frac{1}{(n+p)^2}} <$$

(так как $\forall p \in \mathbb{N} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\arcsin \frac{1}{(n+p)^2}}{\frac{1}{(n+p)^2}} = 1$, то найдётся натуральный номер n_0 такой, что $\forall p \in \mathbb{N}$ и $\forall n \geq n_0$ имеем $\dfrac{\arcsin \frac{1}{(n+p)^2}}{\frac{1}{(n+p)^2}} < 2$)

$$< 2\left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + ... + \frac{1}{(n+p)^2}\right) <$$

(в силу неравенства $\dfrac{1}{k^2} < \dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} \quad (k = 2, 3, ..)$),

$$< 2\left(\frac{1}{(n+1)n} + \frac{1}{(n+2)(n+1)} + ... + \frac{1}{(n+p)(n+p-1)}\right) <$$

$$< 2\left(\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + ... + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{n} - \frac{2}{n+p} < \frac{2}{n}.$$

Неравенство $2/n < \varepsilon$ верно при $n > 2/\varepsilon$. Поэтому, начиная с номера $[2/\varepsilon] + 1$, сразу для всех натуральных p выполняется

неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$, т. е. выполнено необходимое и достаточное условие сходимости последовательности.

324. Оценим сверху модуль разности: $|x_{n+p} - x_n| =$

$$= \left| \left(\frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + ... + \frac{\cos(n+p)!}{(n+p)(n+p+1)} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + ... + \frac{\cos n!}{n(n+1)} \right) \right| =$$

$$= \left| \frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)} + ... + \frac{\cos(n+p)!}{(n+p)(n+p+1)} \right| \leq$$

$$\leq \frac{|\cos(n+1)!|}{(n+1)(n+2)} + \frac{|\cos(n+2)!|}{(n+2)(n+3)} + ... + \frac{|\cos(n+p)!|}{(n+p) \cdot (n+p+1)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + ... + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)}.$$

Используя тождество $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ $(k = n+1, ..., n+p)$, представим каждое слагаемое в виде разности двух дробей:

$$|x_{n+p} - x_n| \leq \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) + ...$$

$$+ \left(\frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} \right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1}.$$

Неравенство $1/(n+1) < \varepsilon$ верно при $n \geq [1/\varepsilon]$, поэтому, начиная с этого номера, при всех $p \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$, что и доказывает сходимость последовательности.

325. Покажем, что последовательность сходится. В самом деле, выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим $|x_{n+p} - x_n| =$

$$= \left| \frac{\cos(2(n+1)+3)}{(n+1)(n+3)} + \frac{\cos(2(n+2)+3)}{(n+2)(n+4)} + ... + \frac{\cos(2(n+p)+3)}{(n+p)(n+p+2)} \right|$$

$$\leqslant \left| \frac{\cos(2(n+1)+3)}{(n+1)(n+3)} \right| + \left| \frac{\cos(2(n+2)+3)}{(n+2)(n+4)} \right| + \left| \frac{\cos(2(n+p)+3)}{(n+p)(n+p+2)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(n+1)(n+3)} + \frac{1}{(n+2)(n+4)} + ... + \frac{1}{(n+p)(n+p+2)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + ... + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} =$$

$$= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + ...$$

$$... + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) + \left(\frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1}.$$

Если выбрать n из условия $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$, т. е. $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$ (например, взять $n_0 = \dfrac{1}{\varepsilon}$), то критерий Коши выполняется и, следовательно, последовательность сходится.

326. Достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся зависящий от него номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что при всех $n > N$ и всех $p \in \mathbb{N}$ будет справедливо неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$. Принимая во внимание неравенство $|\operatorname{arctg} x| \leq |x|$, оценим модуль разности:

$$|x_{n+p} - x_n| = \left|\operatorname{arctg} \frac{1}{(n+1)(n+2)} + ... + \operatorname{arctg} \frac{1}{(n+p)(n+p+1)}\right| \leq$$

$$\leq \left|\operatorname{arctg} \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right| + \left|\operatorname{arctg} \frac{1}{(n+2)(n+3)}\right| + ...$$

$$+ \left|\operatorname{arctg} \frac{1}{(n+p)(n+p+1)}\right| =$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \operatorname{arctg} \frac{1}{(n+2)(n+3)} + ...$$

$$+ \operatorname{arctg} \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + ... + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)}.$$

Используя тождество $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ $(k = n+1, ..., n+p)$, представим каждое слагаемое в виде разности двух дробей:

$$|x_{n+p} - x_n| \leq \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + ...$$

$$+ \left(\frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Выбрав теперь произвольное $\varepsilon > 0$ и решив неравенство $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$, находим, что начиная с номера $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ при всех натуральных p выполняется неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$, что доказывает сходимость последовательности.

327. Оценим модуль разности:

$$|x_{n+p} - x_n| = \left|a_{n+1}q^{n+1} + ... + a_{n+p}q^{n+p}\right| \leq$$

$$\leqslant \left|a_{n+1}q^{n+1}\right| + ... + \left|a_{n+p}q^{n+p}\right| \leqslant$$

$$\leqslant |a_{n+1}||q|^{n+1} + ... + |a_{n+p}||q|^{n+p} < M\left(|q|^{n+1} + ... + |q|^{n+p}\right) <$$

$$< M(|q|^{n+1} + |q|^{n+2} + ...) = M \cdot \frac{|q|^{n+1}}{1-|q|}.$$

Поскольку при $|q| < 1$ имеем $|q|^{n+1} \to 0$, то для произвольно малого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $n_0(\varepsilon)$, начиная с которого верно $\dfrac{M \cdot |q|^{n+1}}{1-|q|} < \varepsilon$, откуда $n \geqslant \left[\log_{|q|} \dfrac{\varepsilon(1-|q|)}{M}\right] = n_0$.

328. Рассмотрим модуль разности

$$|x_{n+p} - x_n| = |(x_{n+p} - x_{n+p-1}) + (x_{n+p-1} - x_{n+p-2}) + ... + (x_{n+1} - x_n)|$$

$$\leqslant |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + ... + |x_{n+1} - x_n| <$$

$$< C\alpha^{n+p-1} + C\alpha^{n+p-2} + ... + C\alpha^n =$$

$$= C\alpha^n(1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^{p-1}) < C\alpha^n(1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^{p-1} + ...) =$$

$$= \frac{C\alpha^n}{1-\alpha} < \varepsilon \quad \text{при } n > \log_\alpha \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{C},$$

что, согласно критерию Коши, означает сходимость последовательности.

329. Достаточно показать, что найдётся $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall N \in \mathbb{N}$ найдутся натуральный номер $n > N$ и натуральное p такие, что будет справедливо неравенство $|x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon_0$. Оценим модуль разности снизу:

$$|x_{n+p} - x_n| = \left| \left(\arcsin 1 + \arcsin \frac{1}{2} + \arcsin \frac{1}{3} + ... + \arcsin \frac{1}{n} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \arcsin \frac{1}{n+1} + ... + \arcsin \frac{1}{n+p} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\arcsin 1 + \arcsin \frac{1}{2} + \arcsin \frac{1}{3} + ... + \arcsin \frac{1}{n} \right) \right| =$$

$$= \left| \arcsin \frac{1}{n+1} + \arcsin \frac{1}{n+2} + ... + \arcsin \frac{1}{n+p} \right| =$$

$$= \arcsin \frac{1}{n+1} + \arcsin \frac{1}{n+2} + ... + \arcsin \frac{1}{n+p} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+p} > \frac{p}{n+p}.$$

Тогда, каким бы большим ни взять n, всегда можно выбрать, например, $p = n$, и получить $|x_{n+p} - x_n| > \dfrac{n}{2n} = \dfrac{1}{2}$. Возьмём в качестве ε_0 любое число из интервала $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, например, $\dfrac{1}{3}$. Итак, нашлось $\varepsilon_0 = 1/3$ такое, что для любого сколь угодно большого $n \in \mathbb{N}$, выбирая $p = n$, получим, что справедливо неравенство $|x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon_0$. Это доказывает расходимость последовательности.

330. Достаточно доказать, что найдётся $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall N \in \mathbb{N}$ (сколь угодно большого) найдутся натуральный номер $n > N$ и натуральное p такие, что будет справедливо неравенство $|x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon_0$. Оценим модуль разности: $|x_{n+p} - x_n| =$

$$= \left| \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} + ... + \frac{1}{\sqrt[3]{n+p}} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \right) \right| =$$

$= \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt[3]{n+p}} > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+p} >$

$> \frac{p}{n+p}$. Тогда, каким бы большим ни взять n, всегда можно выбрать, например, $p = n$, и получить $|x_{n+p} - x_n| > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$. Возьмём в качестве ε_0 любое число из интервала $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, например, $\frac{1}{3}$. Итак, нашлось $\varepsilon_0 = 1/3$ такое, что для любого сколь угодно большого $n \in \mathbb{N}$, выбирая $p = n$, получим, что справедливо неравенство $|x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon_0$, что доказывает расходимость последовательности.

331. Оценим модуль разности: $|x_{n+p} - x_n| =$

$$= \left| \frac{1}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} + ... + \frac{1}{\ln(n+p)} \right| =$$

$$= \frac{1}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} + ... + \frac{1}{\ln(n+p)} > \frac{p}{\ln(n+p)} > \frac{p}{n+p}.$$

При $p = n$ получим $|x_{n+p} - x_n| > \frac{1}{2}$. То есть нашлось ε_0 – любое число из интервала $(0, \frac{1}{2})$ – такое, что $\forall n \in \mathbb{N}$ всегда найдётся натуральное p (достаточно взять $p = n$), что справедливо неравенство $|x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon_0$. Это, согласно критерию Коши, и доказывает расходимость последовательности.

332. Оценим модуль разности: $|x_{n+p} - x_n| =$

$$= \left| \frac{1}{\lg(n+1)} + \frac{1}{\lg(n+2)} + ... + \frac{1}{\lg(n+p)} \right| =$$

$$= \frac{1}{\lg(n+1)} + \frac{1}{\lg(n+2)} + ... + \frac{1}{\lg(n+p)} > \frac{p}{\lg(n+p)} > \frac{p}{n+p}.$$

При $p = n$ получим $|x_{n+p} - x_n| > \frac{1}{2}$. То есть нашлось ε_0 – любое число из интервала $(0, \frac{1}{2})$ – такое, что $\forall n \in \mathbb{N}$ всегда найдётся натуральное p (достаточно взять $p = n$), что справедливо неравенство $|x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon_0$. Это, согласно критерию Коши, и доказывает расходимость последовательности.

333. Согласно критерию Коши, последовательность $\{x_n\}$ расходится тогда и только тогда, когда $\exists\ \varepsilon > 0$: $\forall\ n_0 \in \mathbb{N}$ $\exists\, n \geqslant n_0$ и $\exists\, p \in \mathbb{N}$ $|x_{n+p} - x_n| \geqslant \varepsilon$. При $n \geqslant 2$ имеем:

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{\ln^3(n+1)} + \frac{1}{\ln^3(n+2)} + ... + \frac{1}{\ln^3(n+p)} >$$

$$> \frac{p}{\ln^3(n+p)} = [\text{при } p = n^3] = \left(\frac{n}{\ln(n+n^3)}\right)^3 >$$

$$> \left(\frac{n}{\ln(2n^3)}\right)^3 = \left(\frac{n}{3\ln(\sqrt[3]{2}n)}\right)^3 > \left(\frac{n}{3\sqrt[3]{2}n}\right)^3 = \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}\right)^3 > \varepsilon.$$

Таким образом, каким бы большим ни взять n, всегда можно выбрать, например, $p = n^3$, и тогда $|x_{n+p} - x_n| > \varepsilon$, где в качестве ε можно взять любое число из интервала $\left(0, \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}\right)^3\right)$. Итак, последовательность расходится.

334. Оценим модуль разности

$$|x_{n+p} - x_n| = \left|\sin\frac{1}{n+1} + \sin\frac{1}{n+2} + ... + \sin\frac{1}{n+p}\right| =$$

$$= \sin\frac{1}{n+1} + \sin\frac{1}{n+2} + ... + \sin\frac{1}{n+p} > p\sin\frac{1}{n+p} = \frac{\sin\frac{1}{n+p}}{\frac{1}{n+p}} \cdot \frac{p}{n+p}.$$

Каким бы большим ни взять n, всегда можно выбрать, например, $p = n$, и получить

$$|x_{2n} - x_n| > \frac{\sin\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n}} \cdot \frac{1}{2}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n}} = 1$, то найдётся натуральный номер n_0 такой, что $\forall n \geq n_0$ $\dfrac{\sin\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n}} > \dfrac{1}{2}$, но тогда получим, что начиная с этого номера $|x_{2n} - x_n| > 1/4$. Возьмём в качестве ε_0 любое число из интервала $\left(0, \frac{1}{4}\right)$, например, $1/5$. Итак, нашлось $\varepsilon_0 = 1/5$ такое, что для любого сколь угодно большого $n \in \mathbb{N}$, выбирая

$p = n$, имеем выполнение неравенства $|x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon_0$. Это доказывает расходимость последовательности.

335. Согласно критерию Коши, $\{x_n\}$ расходится тогда и только тогда, когда $\exists \varepsilon > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geqslant n_0,\ \exists p \in \mathbb{N}$: $|x_{n+p} - x_n| \geqslant \varepsilon$. Оценим модуль разности

$$|x_{n+p} - x_n| = \left|\sin\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \sin\frac{1}{\sqrt{n+2}} + ... + \sin\frac{1}{\sqrt{n+p}}\right| =$$

$$= \sin\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \sin\frac{1}{\sqrt{n+2}} + ... + \sin\frac{1}{\sqrt{n+p}} > p \cdot \sin\frac{1}{\sqrt{n+p}} =$$

$$= \frac{p}{\sqrt{n+p}} \cdot \frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n+p}}}{\frac{1}{\sqrt{n+p}}}.$$

Поскольку $\dfrac{\sin\frac{1}{\sqrt{n+p}}}{\frac{1}{\sqrt{n+p}}} \to 1$, то, начиная с некоторого номера n_0, имеем $\dfrac{\sin\frac{1}{\sqrt{n+p}}}{\frac{1}{\sqrt{n+p}}} > \dfrac{1}{2}$. Тогда при $n > n_0$ получим

$$|x_{n+p} - x_n| > \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{\sqrt{n+p}} > \left.\frac{p}{2(n+p)}\right|_{p=n} = \frac{1}{4}.$$

Если взять $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$, то, выбирая при любом сколь угодно большом n значение $p = n$, получим, что выполняется отрицание критерия Коши, т. е. последовательность расходится.

336. Оценим модуль разности

$$|x_{n+p} - x_n| = \left|\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} + \sin\frac{1}{\sqrt[3]{n+2}} + ... + \sin\frac{1}{\sqrt[3]{n+p}}\right| =$$

(при достаточно больших n)

$$= \sin\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} + \sin\frac{1}{\sqrt[3]{n+2}} + ... + \sin\frac{1}{\sqrt[3]{n+p}} >$$

$$> p \cdot \sin\frac{1}{\sqrt[3]{n+p}} = \frac{p}{\sqrt[3]{n+p}} \cdot \frac{\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n+p}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n+p}}} > \frac{p}{n+p} \cdot \frac{\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n+p}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n+p}}}.$$

Каким бы большим ни взять n, всегда можно выбрать, например, $p = n$, и получить

$$|x_{2n} - x_n| > \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \frac{1}{\sqrt[3]{2n}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{2n}}}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin \frac{1}{\sqrt[3]{2n}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{2n}}} = 1$, то найдётся натуральный номер n_0 такой, что $\forall n \geq n_0$ $\dfrac{\sin \frac{1}{\sqrt[3]{2n}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{2n}}} > \dfrac{1}{2}$, но тогда получим, что начиная с этого номера $|x_{2n} - x_n| > 1/4$. Возьмём в качестве ε_0 любое число из интервала $\left(0, \frac{1}{4}\right)$, например, $1/5$. Итак, нашлось $\varepsilon_0 = 1/5$ такое, что для любого сколь угодно большого $n \in \mathbb{N}$, выбирая $p = n$, имеем выполнение неравенства $|x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon_0$. Это доказывает расходимость последовательности.

337. Оценим модуль разности $|x_{n+p} - x_n| =$

$$= \left|\operatorname{arctg} \frac{1}{\ln(n+1)} + \operatorname{arctg} \frac{1}{\ln(n+2)} + ... + \operatorname{arctg} \frac{1}{\ln(n+p)}\right| =$$

(в силу положительности слагаемых)

$$= \operatorname{arctg} \frac{1}{\ln(n+1)} + \operatorname{arctg} \frac{1}{\ln(n+2)} + ... + \operatorname{arctg} \frac{1}{\ln(n+p)} >$$

$$> p \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{\ln(n+p)} > p \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n+p} \cdot \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{n+p}}{\frac{1}{n+p}}.$$

Каким бы большим ни взять n, всегда можно выбрать, например, $p = n$, и получить

$$|x_{2n} - x_n| > \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n}}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} \frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n}} = 1$, то найдётся натуральный номер n_0 такой, что $\forall n \geq n_0$ $\dfrac{\operatorname{arctg} \frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n}} > \dfrac{1}{2}$, но тогда получим, что начиная с этого номера $|x_{2n} - x_n| > 1/4$. Возьмём в качестве ε_0

любое число из интервала $\left(0, \frac{1}{4}\right)$, например, $1/5$. Итак, нашлось $\varepsilon_0 = 1/5$ такое, что для любого сколь угодно большого $n \in \mathbb{N}$, выбирая $p = n$, имеем выполнение неравенства $|x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon_0$, что доказывает расходимость последовательности.

338. Имеем: $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n \cdot (n+1)}} >$

$$> \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{(n+1) \cdot (n+1)}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n+1} = y_n.$$

Докажем расходимость $\{y_n\}$. Согласно критерию Коши, последовательность $\{y_n\}$ расходится тогда и только тогда, когда $\exists\, \varepsilon > 0$: $\forall\, n_0 \in \mathbb{N}\ \exists\, n \geqslant n_0$ и $\exists\, p \in \mathbb{N}\ \ |y_{n+p} - y_n| \geqslant \varepsilon$. Имеем:

$$|y_{n+p} - y_n| = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + ... + \frac{1}{n+p+1} >$$

$$> \frac{p}{n+p+1} = [\text{при } p = n+1] = \frac{1}{2} > \varepsilon > 0.$$

Таким образом, каким бы большим ни взять n, всегда можно выбрать, например, $p = n$, и тогда $|y_{n+p} - y_n| > \varepsilon$, где в качестве ε можно взять любое число из $(0, \frac{1}{2})$. Итак, последовательность $\{y_n\}$ расходится, а значит, по теореме 3, $\{x_n\}$ также расходится.

339. Рассмотрим модуль разности двух членов последовательности с номерами, например, $4k$ и $4k+1$, где k достаточно велико:

$$|x_{4k+1} - x_{4k}| = \left| \frac{(4k+1) \cdot \sin \frac{\pi(4k+1)}{2} + 3}{5(4k+1) - 2} - \frac{4k \cdot \sin \frac{\pi 4k}{2} + 3}{5 \cdot 4k - 2} \right| =$$

$$= \left| \frac{4k+4}{20k+3} - \frac{3}{20k-2} \right| = \left| \frac{(4k+4)(20k-2) - 3(20k+3)}{(20k+3)(20k-2)} \right| =$$

$$= \left| \frac{k^2(80 + \frac{12}{k} - \frac{17}{k^2})}{k^2(20 + \frac{3}{k})(20 - \frac{2}{k})} \right| = \frac{80 + \frac{12}{k} - \frac{17}{k^2}}{(20 + \frac{3}{k})(20 - \frac{2}{k})}.$$

Так как $\dfrac{80 + \frac{12}{k} - \frac{17}{k^2}}{(20 + \frac{3}{k})(20 - \frac{2}{k})} \to \dfrac{1}{5}$ при $k \to +\infty$, то обязательно найдётся номер k_0, начиная с которого $|x_{4k+1} - x_{4k}| > \frac{1}{10}$. Следовательно, условие $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon = \frac{1}{10}$ выполняться сразу

для всех n, начиная с некоторого номера, не будет, а значит, последовательность расходится.

340. а) $|x_{n+p} - x_n| =$

$$= \left| \left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + ... + \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} + ... + \frac{1}{(n+p)^\alpha}\right) - \right.$$

$$\left. - \left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + ... + \frac{1}{n^\alpha}\right)\right| = \left|\frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + ... + \frac{1}{(n+p)^\alpha}\right|$$

$$= \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + ... + \frac{1}{(n+p)^\alpha}.$$

Так как $\alpha \geq 2$, то имеем

$$|x_{n+p} - x_n| \leq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + ... + \frac{1}{(n+p)^2} <$$

$$< \frac{1}{(n+1)n} + \frac{1}{(n+2)(n+1)} + ... + \frac{1}{(n+p)(n+p-1)} =$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + ... + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.$$

Выбрав произвольное $\varepsilon > 0$ и решив неравенство $1/n < \varepsilon$, получим, что при всех $n \geq [1/\varepsilon]+1$ сразу для всех $p \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$, т. е. выполнено необходимое и достаточное условие сходимости для данной последовательности.

б) Имеем при $\alpha \leq 1$

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + ... + \frac{1}{(n+p)^\alpha} \geq$$

$$\geq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+p} > \frac{p}{n+p}.$$

Тогда, каким бы большим ни взять n, выберем, например, $p = n$, и получим

$$|x_{n+p} - x_n| > \frac{p}{n+p} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Возьмём в качестве ε_0 любое число из интервала $(0, \frac{1}{2})$, например, $1/3$. Итак, нашлось $\varepsilon_0 = 1/3$ такое, что для любого сколь угодно большого $n \in \mathbb{N}$ существует такое натуральное $p = n$, что справедливо неравенство $|x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon_0$, что доказывает расходимость последовательности.

Замечание. При $1 < \alpha < 2$ решение задачи с помощью критерия Коши является более сложным. На 2-м курсе в разделе «Числовые ряды» будет доказано, что числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$.

341. Покажем, что последовательность $x_1 = \sqrt{6}$, $x_2 = \sqrt{6+\sqrt{6}}$, $x_n = \sqrt{6+x_{n-1}}$ $(n \geqslant 3)$, пределом которой является число с бесконечным количеством корней, сходится. Достаточно доказать её монотонность и ограниченность.

1) Докажем возрастание последовательности (по индукции). При $n = 1$ имеем $x_2 = \sqrt{6+\sqrt{6}} > \sqrt{6} = x_1$ – верно. Предположим, что при некотором $n = k$ верно неравенство $x_{k+1} > x_k$ и покажем, что тогда $x_{k+2} > x_{k+1}$. Действительно, $x_{k+2} = \sqrt{6+x_{k+1}} > \sqrt{6+x_k} = x_{k+1}$. В силу произвольности k монотонность доказана.

2) Докажем, что последовательность ограничена сверху числом 3 (по индукции), т. е. при всех $n \in \mathbb{N}$ $x_n < 3$. При $n = 1$ имеем $x_1 = \sqrt{6} < 3$ – верно. Предположим, что при некотором $n = k$ верно неравенство $x_k < 3$ и покажем, что $x_{k+1} < 3$. В самом деле, $x_{k+1} = \sqrt{6+x_k} < \sqrt{6+3} = 3$, что и требовалось доказать. Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ сходится.

Найдём её предел $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}}$. Для этого обозначим его через x и возведём равенство в квадрат: $x^2 = 6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}$, или $x^2 = 6+x$. Решая квадратное уравнение, находим $x = 3$. Тогда n-й член последовательности принимает вид $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+3} = \sum\limits_{m=4}^{n+3} \dfrac{1}{m}$. Эта последовательность, как известно, расходится, стремясь к $+\infty$, поэтому, каким бы большим ни было число A, всегда найдётся номер n, начиная с которого будет выполняться неравенство $x_n \geqslant 6^{1010}$.

342. Рассмотрим последовательность $y_n = |x_2 - x_1| +$

$|x_3 - x_2| + ... + |x_n - x_{n-1}|$ $(n \in \mathbb{N})$. Эта последовательность сходится, так как монотонно возрастает и ограничена. Тогда по критерию Коши для последовательности $\{x_n\}$ имеем:

$$|x_{n+p}-x_n| = |(x_{n+1}-x_n)+(x_{n+2}-x_{n+1})+...+(x_{n+p}-x_{n+p-1})| \leqslant$$

$$\leqslant |x_{n+1} - x_n| + |x_{n+2} - x_{n+1}| + ... + |x_{n+p} - x_{n+p-1}| =$$

$$= |y_{n+p} - y_n| < \varepsilon \quad \text{при } n > N(\varepsilon),\ \forall p \in \mathbb{N}.$$

Это означает, что последовательность $\{x_n\}$ сходится.

В качестве примера рассмотрим последовательность $x_n = \dfrac{1-(-1)^n}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$. Она, очевидно, сходится. Покажем, что в то же время $\{x_n\}$ не имеет ограниченного изменения. Для любого $C > 0$ имеем

$$|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+...+|x_{2n}-x_{2n-1}| = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1} >$$

$$> \ln(1+1) + \ln\left(1+\frac{1}{3}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{5}\right) + ... + \ln\left(1+\frac{1}{2n-1}\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot...\cdot\frac{2n}{2n-1}\right) > \ln\sqrt{2n+1} > C \text{ при } n > \frac{1}{2}(e^{2C}-1)$$

При доказательстве использовались ранее доказанные неравенства $\frac{1}{n} > \ln(1+\frac{1}{n})$ (см. п. 6.2) и $\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot...\cdot\frac{2n}{2n-1} > \sqrt{2n+1}$ (см. п. 2.3).

343. Положим $x_n = 1 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$, $y_n = n^3$, тогда по теореме Штольца

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+2^2+3^2+...+n^2}{n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^3-(n-1)^3} = ... = \frac{1}{3}.$$

Замечание. С помощью теоремы Штольца можно доказать, что в общем случае $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1^k+2^k+3^k+...+n^k}{n^{k+1}} = \dfrac{1}{k+1}$ $(k \in \mathbb{N})$.

344. Положим $x_n = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + ... + n\cdot n!$, $y_n = (n+1)!$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1\cdot 1!+2\cdot 2!+...+n\cdot n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\cdot n!}{(n+1)!-n!} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1-1} = 1.$$

345. Обозначим $x_n = 1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + ... + \sqrt[n]{n}$, $y_n = n$, тогда

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

346. Положим $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}$, $y_n = \sqrt{n}$, тогда, применяя теорему Штольца, получаем

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n}(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)}{\sqrt{n}} = 2.$$

347. Для доказательства воспользуемся теоремой Штольца. Положим $x_n = \ln 2 + \ln 3 + ... + \ln n$, $y_n = n^2$, тогда

$$0 \leqslant \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^2 - (n-1)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{2n-1} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$$

Следовательно, предел равен нулю.

348. Применяя теорему Штольца, сразу получаем

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n - a^{n-1}}{n - (n-1)} = \lim_{n\to+\infty} a^{n-1}(a-1) = +\infty.$$

349. Положим $a_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$, $b_n = n$. Тогда по теореме Штольца имеем:

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} x_n.$$

350. Если $x_n = (-1)^n$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = 0$, однако $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, как известно, не существует.

351. Воспользуемся утверждением: если последовательность $\{x_n\}$ сходится и $x_n > 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_3}{x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{x_{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}}.$$

352. Воспользуемся вспомогательным утверждением (см. задачу выше): если $x_n > 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{x_{n-1}}$ в предположении, что предел справа существует.

Поскольку $\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{\dfrac{n^n}{n!}} = \sqrt[n]{x_n}$, где $x_n = \dfrac{n^n}{n!}$, и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{x_{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1} = e$, то равенство доказано.

8 СЕМИНАР: Подпоследовательности. Предельные точки последовательности. Верхний и нижний пределы

«Мудрость не всегда приходит с возрастом.
Бывает, что возраст приходит один».

Михаил Жванецкий (1934–2020) –
русский писатель-сатирик и
исполнитель собственных
литературных произведений.

Домашнее задание: 353–356, 358–360, 362–369, 372–376, 377(а), 378.

8.1 Понятие подпоследовательности. Предельные точки. Принцип Больцано-Вейерштрасса

Понятие подпоследовательности. Рассмотрим некоторую последовательность $x_1, x_2, x_3, ...x_n, ...$ и произвольную возрастающую последовательность натуральных чисел $k_1, k_2, k_3, ...k_n, ...$ Выберем из последовательности $\{x_n\}$ элементы с номерами $k_1, k_2, k_3, ...k_n, ...$ и расположим их в порядке возрастания указанных номеров. Мы получим при этом новую последовательность

$$x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, ..., x_{k_n}, ...,$$

которую принято называть *подпоследовательностью* исходной последовательности $\{x_n\}$. В частности, сама последовательность $\{x_n\}$ может рассматриваться как подпоследовательность с номерами $k_n = n$.

Заметим сразу же, что всегда $k_n \geqslant n$, поскольку любая подпоследовательность, не совпадающая со всей последовательностью, получается путем «прореживания» элементов последовательности.

Воспользуемся далее понятием *расши́ренного множества действительных чисел* $\overline{\mathbb{R}}$. Выражение $a \in \overline{\mathbb{R}}$ означает, что a является или действительным числом, или элементом $-\infty$, или

элементом $+\infty$.[1]

Справедливы утверждения.

Теорема 1. Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к пределу $a \in \overline{\mathbb{R}}$, то и любая её подпоследовательность сходится к тому же пределу a.

В частности: 1) любая подпоследовательность бесконечно большой последовательности представляет собой также бесконечно большую последовательность. 2) Любая подпоследовательность фундаментальной последовательности фундаментальна.

Теорема 2. Если все подпоследовательности некоторой последовательности $\{x_n\}$ сходятся (каждая – к некоторому пределу из $\overline{\mathbb{R}}$), то все они сходятся к одному и тому же пределу, в том числе к этому же пределу сходится и вся последовательность.

Из теорем 1 и 2 получаем следующий критерий сходимости числовой последовательности.

Теорема 3. Последовательность $\{x_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда любая её подпоследовательность сходится к одному пределу $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Теорема 4. Если любая подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся к одному и тому же пределу $a \in \overline{\mathbb{R}}$, то и сама последовательность $\{x_n\}$ сходится к этому пределу a.

Понятие предельной точки (частичного предела). Принцип Больца́но–Вейерштра́сса.

Опр. 1. Число $a \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой* последовательности $\{x_n\}$, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n \in \mathbb{N} : |x_n - a| < \varepsilon$.

Опр. 2. Точка a бесконечной прямой $(-\infty, +\infty)$ называется *предельной точкой* последовательности $\{x_n\}$, если в любой ε-окрестности точки a содержатся бесконечно много элементов этой последовательности.[2]

---

[1] Мн-во $\overline{\mathbb{R}}$ включает свои предельные точки $\pm\infty$, т. е. $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

[2] Если принять во внимание, что *окрестностью бесконечно удалённой точки* $+\infty$ называется множество $\{x \in \mathbb{R} : x > M\}$, а *окрестностью точ-*

Опр. 3. Точка a бесконечной прямой $(-\infty, +\infty)$ называется *предельной точкой* последовательности $\{x_n\}$, если из этой последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к a.

Определения 1–3 эквивалентны.

Справедливы следующие теоремы о предельных точках.

Теорема 5. Для того чтобы точка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ являлась пределом последовательности $\{x_n\}$, необходимо и достаточно, чтобы за пределами любой окрестности этой точки находилось конечное число членов последовательности или пустое множество.

Теорема 6. Произвольная последовательность может иметь конечное или бесконечное число частичных пределов.

Теорема 7. Каждая сходящаяся последовательность имеет только одну предельную точку, совпадающую с пределом этой последовательности.

Теорема 8. (*Принцип Больца́но–Вейерштра́сса*). Всякая ограниченная последовательность имеет хотя бы одну конечную предельную точку.[1]

Теорема 8'. (*Обобщённая теорема Больца́но–Вейерштра́сса*). Из любой последовательности действительных чисел можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому пределу $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Теорема 9. Множество частичных пределов произвольной последовательности замкнуто в $\overline{\mathbb{R}}$, т. е. содержит свою границу.

8.2 Нижний и верхний пределы и их свойства

«Всё было, в общем-то, неплохо,
пока не стали улучшать».
Владимир Поляков (р. 1955) живёт

ки $-\infty$ называется множество $\{x \in \mathbb{R} : x < -M\}$, где M – произвольное (положительное) действительное число, то Опр. 2 допускает обобщение: точка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ является частичным пределом последовательности тогда и только тогда, когда в любой окрестности точки a содержится бесконечное число членов последовательности.

[1] Иначе: из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

в Питере, пишет ироничные двустишия.

Опр. 4. Наименьший частичный предел (конечный или бесконечный) последовательности $\{x_n\}$ называется *нижним пределом* и обозначается $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n$, а наибольший частичный предел, соответственно, *верхним пределом* и обозначается $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n$.[1]

Если последовательность не ограничена сверху, то её верхний частичный предел равен плюс бесконечности:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n = +\infty.$$

Соответственно, если последовательность не ограничена снизу, то

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n = -\infty.$$

Если последовательность ограничена, то её верхний и нижний частичные пределы конечны.

Опр. 5. Для ограниченной сверху последовательности $\{x_n\}$ её верхний предел может быть определён как такое число M, что для любого $\varepsilon > 0$ правее $M + \varepsilon$ имеется не более конечного числа членов x_n последовательности, а правее $M - \varepsilon$ заведомо имеется бесконечное число элементов x_n. Аналогично, для ограниченной снизу последовательности её нижний предел можно определить как такое число m, что для произвольного $\varepsilon > 0$ левее $m - \varepsilon$ имеется не более конечного числа точек (элементов) x_n, а левее $m + \varepsilon$ находится бесконечное количество x_n.

Свойства верхних и нижних пределов.

Теорема 10 (*о существовании верхнего и нижнего частичных пределов*). У любой последовательности существует как верхний, так и нижний частичные пределы, принадлежащие

[1] Иногда для этих целей используют обозначения $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k>n} x_k$ для верхнего предела и $\lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{k>n} x_k$ для нижнего предела.

расширенному множеству действительных чисел $\overline{\mathbb{R}}$. В том числе, у ограниченной последовательности существуют конечные верхний и нижний пределы.

Теорема 11 (*о неравенстве между верхним и нижним частичными пределами*). В любой последовательности верхний и нижний пределы удовлетворяют неравенству:

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n,$$

причём эти пределы равны друг другу тогда и только тогда, когда существует предел последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \varliminf_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = a, \quad a \in \overline{\mathbb{R}}.$$

В частности, имеем теорему.

Теорема 12. Последовательность $\{x_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда она ограничена и верхний предел равен нижнему:

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n.$$

Теорема 13. Для любого наперёд взятого положительного числа ε все элементы ограниченной числовой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, начиная с некоторого номера, зависящего от ε, лежат внутри интервала $(\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n - \varepsilon,\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n + \varepsilon)$.

Теорема 14. Если за пределами интервала (a, b) лежит лишь конечное число элементов ограниченной числовой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, то интервал $(\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n,\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n)$ содержится в интервале (a, b).

Теорема 15. Для любых ограниченных последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ справедливы неравенства

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} (x_n + y_n) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, (x_n + y_n) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n.$$

Теорема 16. $\inf x_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \leqslant \sup x_n$.

Теорема 17. Если $x_n \geqslant 0$, $y_n \geqslant 0$, то

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \cdot \underline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, (x_n y_n) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, (x_n y_n) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n.$$

Теорема 18. $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, (-x_n) = -\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n.$

Теорема 19. Если $y_n > 0$ и $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n > 0$, то

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{1}{y_n} = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n}.$$

Теорема 20. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится к конечному положительному числу a, и пусть $\{y_n\}$ – любая последовательность. Тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, (x_n y_n) = a \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n.$$

Отсюда, в частности, получаем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, (a y_n) = a \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n.$$

8.3 Задачи для самостоятельного решения

№353. Верно ли, что *подпоследовательностью* последовательности $\{x_n\}$ можно назвать последовательность, полученную из $\{x_n\}$ удалением части её членов[1] без изменения порядка следования членов?

№354. Можно ли сказать, что *подпоследовательность* последовательности $\{x_n\}$ – это подмножество множества $\{x_n\}$, сохраняющее порядок следования членов?

№355. Используя логическую символику, записать следующее высказывание, а также его отрицание: «Число $a \in \mathbb{R}$ является предельной точкой последовательности $\{x_n\}$».

Выделяя подпоследовательности, сходящиеся к разным пределам, доказать расходимость последовательности:

№356. $x_n = \sin(n^\circ)$;

№357. $x_n = n^{\cos \pi n}$.

№358. Доказать, что любая последовательность содержит монотонную подпоследовательность.

Для последовательности $\{x_n\}$ **найти** $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n$, $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n$:

№359. [6, № 114] $x_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}}$;

№360. [6, № 111] $x_n = \dfrac{n^2}{1+n^2} \cdot \cos \dfrac{2\pi n}{3}$.

Для последовательности $\{x_n\}$ **найти** $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$, $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n$, $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n$ $(n \in \mathbb{N})$**:**

№361. [6, № 106] $x_n = (-1)^n n$;

№362. [6, № 101(б)] $x_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \dfrac{3}{n}\right)$;

№363. [6, № 103] $x_n = 1 + \dfrac{n}{n+1} \cos \dfrac{\pi n}{2}$;

№364. [6, № 102] $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1 + (-1)^n}{2}$;

[1] Конечного или бесконечного количества, причём во втором случае после удаления должно остаться бесконечное количество членов.

№365. [6, № 104] $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$;

№366. [6, № 105] $x_n = \dfrac{n-1}{n+1} \cdot \cos\dfrac{2\pi n}{3}$;

№367. [6, № 108] $x_n = n^{(-1)^n}$;

№368. $\{x_n\} = \left\{\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{6}, \dfrac{6}{7}, ...\right\}$;

№369. $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \dfrac{n+2}{n} \cdot x_n$.

№370. [6, № 116] Найти частичные пределы последовательности

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, ..., \frac{1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}, ...$$

№371. Найти частичные пределы последовательности

$$x_n = \sin n^\circ.$$

Найти верхний и нижний пределы этой последовательности.

№372. Найти верхний и нижний пределы последовательности

$$x_n = \left(1 + \sin\frac{\pi n}{4}\right)\left(1 - \cos\frac{\pi n}{6}\right).$$

№373. [6, № 121] Построить пример числовой последовательности, имеющей в качестве своих частичных пределов числа $a_1, a_2, a_3, ..., a_p$.

№374. [6, № 122] Построить пример числовой последовательности, для которой все члены данной числовой последовательности $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ являются её частичными пределами. Какие ещё частичные пределы обязательно имеет построенная последовательность?

№375. [6, № 123] Построить пример числовой последовательности: а) не имеющей конечных частичных пределов;
б) имеющей единственный конечный частичный предел, но не являющейся сходящейся;
в) имеющей бесконечное множество частичных пределов.

№376. Привести пример последовательности, у которой множество частичных пределов есть вся числовая прямая, включая $\pm\infty$.

№377. Сходится ли последовательность $\{a_n\}$, если:
а) сходятся её подпоследовательности $\{a_{2k}\}$ и $\{a_{2k-1}\}$;
б) сходятся её подпоследовательности $\{a_{2k}\}$, $\{a_{2k-1}\}$ и $\{a_{3k}\}$?

№378. Может ли множество предельных точек числовой последовательности образовывать множество:
а) $\{\frac{1}{n}\}$, $n \in \mathbb{N}$;
б) интервал $(0, 1)$;
в) множество рациональных чисел из отрезка $[a, b]$;
г) множество действительных чисел $\mathbb{R}$?

8.4 Ответы и решения

353. Верно. **354**. Да.

355. Число $a \in \mathbb{R}$ является предельной точкой последовательности $\{x_n\} \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} : |x_n - a| < \varepsilon$. Число $a \in \mathbb{R}$ не является предельной точкой последовательности $\{x_n\} \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists \varepsilon > 0 \; \forall n \in \mathbb{N} : |x_n - a| \geqslant \varepsilon$.

356. Заметим, что члены с номерами вида $90 + 360 \cdot k$ равны 1 и образуют подпоследовательность с пределом, равным 1. Члены с номерами $270 + 360 \cdot k$ равны (-1) и образуют подпоследовательность, предел которой равен (-1). Итак, последовательность содержит две подпоследовательности, сходящиеся к разным пределам. Это означает, что предел последовательности не существует, а значит, она расходится.

357. Разобьём данную последовательность на две подпоследовательности, соответственно, с чётными и нечётными номерами: $x_{2k-1} = \dfrac{1}{2k-1}$, $x_{2k} = 2k$. Первая из них является бесконечно малой, а вторая – бесконечно большой последовательностью. Это доказывает расходимость исходной последовательности.

358. 1) Если последовательность не ограничена сверху, то в ней обязательно имеется монотонная подпоследовательность, которая стремится к $+\infty$ (объясните, почему, и как её построить). В случае неограниченности снизу всегда существует подпоследовательность, монотонно стремящаяся к $-\infty$.

2) Если же последовательность ограничена, то по теореме Больцано-Вейерштрасса она содержит сходящуюся подпоследовательность. Осталось воспользоваться тем фактом, что из любой сходящейся последовательности можно выделить монотонную (в нестрогом смысле слова) подпоследовательность.

Поясним это. Если сходящаяся последовательность принимает конечное множество значений, то все её члены, начиная с некоторого, будут равны её пределу и образуют монотонную подпоследовательность. Если же сходящаяся последовательность принимает бесконечное множество значений, то слева

или справа от её предела a находится бесконечно много членов, отличных от a (и среди них нет ближайшего к пределу). Пусть, ради определённости, слева от предела находится бесконечно много членов последовательности. Возьмём какой-либо из этих членов и обозначим его a_{n_1}. На интервале (a_{n_1}, a) также находится бесконечно много членов, выберем один из них с номером больше, чем n_1, пусть это будет a_{n_2}. На интервале (a_{n_2}, a) опять находится бесконечно много членов, выберем один из них с номером больше, чем n_2, и возьмём его как a_{n_3}, и т. д. Получим монотонно возрастающую подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$, $k \in \mathbb{N}$. Случай, когда бесконечно много разных элементов находятся справа от предела, рассматривается аналогично.

359. Выделим две подпоследовательности: 1) если $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, то $x_{2k} = \sqrt[2k]{1 + 2^{2k}} \sim (2^{2k})^{\frac{1}{2k}} \to 2$; 2) если $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, то $x_{2k-1} = \sqrt[2k-1]{1 + \frac{1}{2^{2k-1}}} \to 1$. Поэтому $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{2k-1} = 1$, $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{2k} = 2$.

360. Так как $x_{3k-2} < x_{3k-1} < x_{3k}$ и все три подпоследовательности сходятся, то $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{3k-2} = -\frac{1}{2}$, $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{3k} = 1$.

361. Имеем $-\infty \swarrow x_{2k-1} < x_{2k} \nearrow +\infty$, откуда следует ответ: $\inf\{x_n\} = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = -\infty$, $\sup\{x_n\} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = +\infty$.

362. Выделим из $\{x_n\}$ две подпоследовательности с чётными и нечётными номерами: $x_{2k-1} = 2 + \frac{3}{2k-1}$ и $x_{2k} = -2 - \frac{3}{2k}$ ($k \in \mathbb{N}$). Заметим, что $\forall k \in \mathbb{N}\ x_{2k} < x_{2k-1}$, причём $\{x_{2k-1}\}$, монотонно убывая, сходится к 2, а $\{x_{2k}\}$, монотонно возрастая, сходится к -2. Поэтому $\sup\{x_n\} = x_1 = 5$, $\inf\{x_n\} = x_2 = -\frac{7}{2}$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2k} = -2$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2k-1} = 2$.

Замечание. Последовательность $\{x_n\}$ не является сходящейся, так как $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \neq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

363. Разобьём $\{x_n\}$ на 4 подпоследовательности: $n = 4k-3$, $n = 4k-2$, $n = 4k-1$, $n = 4k$ ($k \in \mathbb{N}$).

Если $n = 4k - 3$, то $\cos\frac{\pi n}{2} = 0$, $x_{4k-3} \equiv 1$ – постоянна и,

следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{4k-3} = \sup\{x_{4k-3}\} = \inf\{x_{4k-3}\} = 1$.

Если $n = 4k-2$, то $\cos\frac{\pi n}{2} = -1$, $x_{4k-2} = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$ – убывая, стремится к 0. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{4k-2} = \inf\{x_{4k-2}\} = 0$, $\sup\{x_{4k-2}\} = x_{4k-2}|_{k=1} = x_2 = \frac{1}{3}$.

Если $n = 4k-1$, то $\cos\frac{\pi n}{2} = 0$, $x_{4k-1} \equiv 1$ – постоянна. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{4k-1} = \inf\{x_{4k-1}\} = \sup\{x_{4k-1}\} = 1$.

Если $n = 4k$, то $\cos\frac{\pi n}{2} = 1$, $x_{4k} = 1 + \frac{n}{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}$ – возрастая, стремится к 2. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{4k} = \sup\{x_{4k}\} = 2$, $\inf\{x_{4k}\} = x_{4k}|_{k=1} = x_4 = \frac{9}{5}$. Тогда

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \min\{\lim_{n\to\infty} x_{4k}, \lim_{n\to\infty} x_{4k-1}, \lim_{n\to\infty} x_{4k-2}, \lim_{n\to\infty} x_{4k-3}\} = 0,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \max\{\lim_{n\to\infty} x_{4k}, \lim_{n\to\infty} x_{4k-1}, \lim_{n\to\infty} x_{4k-2}, \lim_{n\to\infty} x_{4k-3}\} = 2,$$

$$\inf\{x_n\} = \min\{\inf\{x_{4k}\}, \inf\{x_{4k-1}\}, \inf\{x_{4k-2}\}, \inf\{x_{4k-3}\}\} = 0,$$

$$\sup\{x_n\} = \max\{\sup\{x_{4k}\}, \sup\{x_{4k-1}\}, \sup\{x_{4k-2}\}, \sup\{x_{4k-3}\}\} = 2.$$

Замечание. Случаи $n = 4k-3$ и $n = 4k-1$ можно было объединить в один: $n = 2k-1$. Отметим также, что полученные результаты следуют из цепочки:

$$0 \swarrow x_{4k-2} < x_{2k-1} < x_{4k} \nearrow 2,$$

выполняемой при всех $k \in \mathbb{N}$. Здесь $x_{4k-2} = \frac{1}{4k-1}$, $x_{2k-1} = 2 - \frac{1}{2k}$, $x_{4k} = 2 - \frac{1}{4k+1}$, а стрелки указывают направление монотонности.

364. $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 0$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 1$, $\inf\{x_n\} = -1$, $\sup\{x_n\} = 1,5$;

365. $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \inf\{x_n\} = -4$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \sup\{x_n\} = 6$.

366. $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \inf\{x_n\} = -\frac{1}{2}$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \sup\{x_n\} = 1$;

367. $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \inf\{x_n\} = 0$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \sup\{x_n\} = +\infty$.

368. Подберём формулу общего члена этой последовательности: $x_n = \dfrac{n + (-1)^{n+1}}{n+2}$. 1) Если $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$:

$x_{2k} = \dfrac{n-1}{n+2} = 1 - \dfrac{3}{n+2} \nearrow 1$. Следовательно, $\inf x_{2k} = \dfrac{1}{4}$, $\sup x_{2k} = 1$.

2) Если $n = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$: $x_{2k-1} = \dfrac{n+1}{n+2} = 1 - \dfrac{1}{n+2} \nearrow 1$. Поэтому $\inf x_{2k-1} = \dfrac{2}{3}$, $\sup x_{2k-1} = 1$.

Последовательность сходится к 1, а значит $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = 1$. Кроме того, $\inf x_n = \min\left\{\dfrac{1}{4}; \dfrac{2}{3}\right\} = \dfrac{1}{4}$.

369. Найдём формулу общего члена последовательности. Для этого подставим в рекуррентное соотношение вместо n поочерёдно $1, 2, ..., n$. Имеем равенства:

$x_1 = 2$,
$x_2 = \frac{3}{1} \cdot x_1$,
$x_3 = \frac{4}{2} \cdot x_2$,
$x_4 = \frac{5}{3} \cdot x_3$,
.....,
$x_{n-1} = \dfrac{n}{n-2} \cdot x_{n-2}$,
$x_n = \dfrac{n+1}{n-1} \cdot x_{n-1}$.

Далее перемножим эти равенства. После сокращения получим $x_n = 2 \cdot \dfrac{3}{1} \cdot \dfrac{4}{2} \cdot \dfrac{5}{3} \cdot ... \cdot \dfrac{n}{n-2} \cdot \dfrac{n+1}{n-1} = \dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = n(n+1)$. Последовательность монотонно возрастает и стремится к плюс бесконечности. Поэтому $\inf\{x_n\} = x_1 = 2$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \sup\{x_n\} = +\infty$.

370. Из членов данной последовательности выделим две сходящиеся подпоследовательности (с нечётными и чётными номерами): $x'_n = \frac{1}{2^n}$ и $x''_n = \frac{2^n-1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Их пределы $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x''_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^n} = 1$ будут частичными пределами последовательности.

Покажем, что других предельных точек нет. Предположим противное, т. е. что имеется некоторая бесконечная подпоследовательность x'''_n, сходящаяся к числу, отличному от 0 и 1. Все её члены находятся среди членов указанных выше двух подпоследовательностей. Если предположить, что эта подпоследова-

тельность содержит бесконечно много членов x'_n и конечное число членов x''_n, то она будет сходиться к 0. Если предположить, что она содержит бесконечно много членов x''_n и конечное число членов x'_n, то она будет сходиться к 1. Содержать бесконечно много членов как одной, так и другой подпоследовательностей x'''_n не может, так как тогда она будет расходиться. Получили противоречие с предположением. Таким образом, никаких других частичных пределов исходная последовательность иметь не может.

371. а) Учитывая свойства функции $y = \sin x$, получаем, что при любом натуральном n данная функция принимает одно из 181 значений: 0, $\pm\sin 1^\circ$, $\pm\sin 2^\circ$, $\pm\sin 3^\circ$, $\ldots$, $\pm\sin 89^\circ$, ± 1. При этом каждое из этих чисел встречается в последовательности бесконечное число раз. Следовательно, каждое указанное число является предельной точкой последовательности $\sin n^\circ$. Других предельных точек последовательность не имеет.

б) Из указанных 181 предельных точек наименьшей является (-1), а наибольшей 1.

372. Видно, что наибольшее значение первого из двух сомножителей в скобках равно 2 и достигается, если $\sin\frac{\pi n}{4} = -1$, а наибольшее значение второго из сомножителей равно также 2 и достигается при условии $\cos\frac{\pi n}{6} = 1$. Верхний предел последовательности будет равен 4, если система

$$\begin{cases} \sin\frac{\pi n}{4} = -1, \\ \cos\frac{\pi n}{6} = 1 \end{cases}$$

имеет решение в виде последовательности, сходящейся к этому числу. Решим систему:

$$\begin{cases} \frac{\pi n}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ \frac{\pi n}{6} = \pi + 2\pi l \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} n = 2 + 8k, \\ n = 6 + 12l. \end{cases}$$

Приравнивая $2 + 8k = 6 + 12l$, приходим к линейному диофантову уравнению $2k = 1 + 3l$, решая которое, находим $l = 1 + 2p$, где $p = 0, 1, 2, \ldots$ Подставляя во второе уравнение системы, находим её решение $n = 24p + 18$. Это означает, что нашлась подпоследовательность $\{x_{24p+18}\}$, которая сходится к 4. Следовательно, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 4$.

Найдём нижний предел. Так как оба сомножителя неотрицательны, то нижний предел может быть также неотрицательным. Наименьшее его возможное значение – это 0. Очевидно, существуют подпоследовательности, в которых один из сомножителей равен нулю, например $\{x_{8m-2}\}$, $m \in \mathbb{N}$, поэтому $\underset{n\to\infty}{\lim} x_n = 0$.

373. В качестве одного из примеров приведём последовательность

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_p, a_1, a_2, a_3, ..., a_p, a_1, a_2, a_3, ..., a_p, ...$$

Построим другой пример. Для этого рассмотрим последовательности вида $x_{kn} = a_k + \frac{1}{n}$, $k = 1, 2, ..., p$; $n \in \mathbb{N}$, которые при $n \to +\infty$ сходятся к своим пределам a_k. Составим из членов последовательностей x_{kn} последовательность, например, вида

$$a_1+1, a_2+1, ..., a_p+1, a_1+\frac{1}{2}, a_2+\frac{1}{2}, ..., a_p+\frac{1}{2}, ..., a_1+\frac{1}{n}, a_2+\frac{1}{n}, ...,$$

$a_p + \frac{1}{n}, ...$, которая также удовлетворяет условиям задачи.

374. В качестве простейшего примера приведём последовательность

$$a_1, a_1, a_2, a_1, a_2, a_3, a_1, a_2, a_3, a_4, ...$$

Другой пример – последовательность

$$a_1, a_1 + \frac{1}{2}, a_2, a_1 + \frac{1}{3}, a_2 + \frac{1}{3}, a_3, a_1 + \frac{1}{4}, a_2 + \frac{1}{4}, a_3 + \frac{1}{4}, a_4, ...$$

составленная из членов последовательностей $x_n = a_n$, $x_{kn} = a_k + \frac{1}{n+k}$ $(k, n \in \mathbb{N})$. Эта последовательность имеет своими частичными пределами не только числа $a_1, a_2, a_3, ...$, но и все частичные пределы, имеющиеся у последовательности $\{a_n\}$.

375. а) $\{x_n\} = n$ или $\{x_n\} = -n^3$.

б) Пусть $\{x_n\} \to a$, $\{y_n\}$ – бесконечно большая последовательность, тогда $x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_n, y_n, ...$ – расходится и при этом имеет единственный конечный частичный предел a. Например, $\{x_n\} = \frac{1}{n}$, $\{y_n\} = n$.

в) Например, $a_1, a_1, a_2, a_1, a_2, a_3, a_1, a_2, a_3, a_4, ...$

376. В явном виде общий член выписать сложно, но идея как и в доказательстве счётности множества рациональных чисел: строим последовательность, в которую входят все рациональные числа (известно, что их можно занумеровать). Далее, по определению, любое действительное число – предел последовательности рациональных чисел. Поэтому, так как в последовательности будут все рациональные числа, то из неё всегда можно будет выбрать подпоследовательность, сходящуюся к нужному действительному числу (или к $\pm\infty$).

377. а) Не обязательно, например, $a_n = (-1)^n$.
б) Да, сходится. В самом деле, подпоследовательность $\{a_{3k}\}$ содержит в себе бесконечно много членов каждой из подпоследовательностей $\{a_{2k}\}$ и $\{a_{2k-1}\}$, значит, все они сходятся к одному и тому же пределу. А так как эти три подпоследовательности содержат все члены исходной последовательности, то она также сходится.

378. Во всех случаях ответ отрицательный (в силу Теоремы 9), так как данные множества не являются замкнутыми в $\overline{\mathbb{R}}$.

9 СЕМИНАР: Понятие функции. Ограниченность. Точные грани функции. Предел функции

«Много из математики не остаётся в памяти, но когда поймёшь её, тогда легко при случае вспомнить забытое».

М.В. Остроградский (1801–1862) – выдающийся русский математик. Именем Остроградского назван эллиптический интеграл, который Михаил Васильевич впервые сумел взять в 1837 году. Полностью он называется интегралом Эрмита–Остроградского, потому что ту же работу одновременно и независимо проделал француз Шарль Эрмит. Известен исторический анекдот об этом интеграле. Руководивший строительством железной дороги из Петербурга в Москву Петр Клейнмихель доложил царю, что в одном месте придётся обходить возвышенность, так как профиль местности не поддаётся расчёту. Вычисления приводят к эллиптическому интегралу, а такие интегралы не берутся. Российский самодержец, однако, начертал на рапорте Клейнмихеля: «Повелеваю интегрировать». Тот кинулся за помощью в университет, и молодой профессор Остроградский уже через месяц дал решение эллиптических интегралов.

Домашнее задание: 380–392, 394–396, 397(а–д), 398(в,г, е,з), 401, 405, 407, 409, 410.

9.1 Понятие функции одной переменной

Пусть X и Y – два непустых множества действительных чисел. Если любому $x \in X$ по некоторому правилу ставится в соответствие единственное число $y \in Y$, причём для каждого $y \in Y$ существует хотя бы одно отвечающее ему значение $x \in X$, то говорят, что на множестве X определена однозначная функция одной действительной переменной x, обозначаемая $y = f(x)$ (здесь f называется *характеристикой* функции):

$$f : X \to Y.$$

При этом x называется *аргументом функции* (или независимой переменной), а y, равное $f(x)$, – значением функции в точке x (или зависимой переменной). Также можно сказать, что y есть *образ* x при отображении f, а x, соответственно, есть *прообраз* y. Множество X называется *областью определения* функции и часто обозначается $D(f)$, а множество Y всех значений функции называется *областью изменения*, или *множеством значений*, функции и обозначается $E(f)$.

Графиком функции $y = f(x)$ называют геометрическое место точек $(x; f(x))$ на плоскости Oxy, где $x \in X$.

9.2 Монотонные и немонотонные функции

Введём понятие монотонной функции.

Опр. 1. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на множестве $X \subseteq D(f)$, если для любых двух значений аргумента $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1) > f(x_2)$).

Возрастающие и убывающие функции называют *строго монотонными* на множестве X.

Опр. 2. Функция $y = f(x)$ называется *невозрастающей* (*неубывающей*) на множестве $X \subseteq D(f)$, если для любых двух значений аргумента $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1) \leqslant f(x_2)$).

Невозрастающие и неубывающие функции называют *монотонными в нестрогом смысле слова* на множестве X. Все че-

тыре типа функций, определённые выше, относят к *монотонным функциям* (на множестве X).

Замечание. Пусть функция задана на промежутке X. Придадим аргументу в произвольной точке $x_0 \in X$ приращение Δx,[1] тогда ему будет соответствовать приращение функции $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. Для возрастающих функций знак приращения аргумента совпадает со знаком приращения функции, а для убывающих – противоположен ему. В этом смысле можно сказать, что монотонные функции – это функции, приращения которых не меняют знака, т. е. либо всегда неотрицательны, либо всегда неположительны.

Приведём примеры монотонных и немонотонных функций.

Пример 104. Функции $y = x^3$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \arcsin x$, $y = \ln x$, $y = \sqrt{x}$ являются (строго) возрастающими на всей области определения. □

Пример 105. Функции $y = 1 - x^{3/5}$, $y = \operatorname{arcctg} x$, $y = \arccos x$, $y = \sqrt[4]{-x}$, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ являются строго убывающими на своей области определения. □

Пример 106. Функции $y = \operatorname{sgn} x$, $y = [x]$ (целая часть) – неубывающие на всей числовой оси. □

Пример 107. Функции $y = |x|$, $y = x^2$, $\ln|x|$ возрастают при $x \geqslant 0$ и убывают при $x \leqslant 0$. □

Пример 108. Функция $y = 1/x$ убывает на каждом из множеств $x < 0$ и $x > 0$, но не является убывающей на их объединении. □

Пример 109. Функции $y = \sin x$, $y = \{x\}$, $y = \operatorname{tg} x$ не являются монотонными на своей области определения. □

Пример 110. Функция $y \equiv 2$ ($x \in \mathbb{R}$) одновременно является неубывающей и невозрастающей на множестве действительных чисел. □

Исследованием функций на монотонность мы займёмся позже, когда изучим понятие дифференцируемости функций и научимся применять производные для этих целей.

[1] положительное или отрицательное число такое, что $(x_0 + \Delta x) \in X$.

9.3 Ограниченные и неограниченные функции. Точные грани функции. Наибольшее и наименьшее значения

«Лучше учится не тот, кто усердно запоминает прочитанное,
а тот, кто приобретает умение применять пройденное к своему делу!»

М.В. Остроградский (1801–1862) – выдающийся российский математик и механик, автор метода и формулы Остроградского, работ по теории упругости, теории магнетизма и теории вероятностей. Признанный лидер математиков Российской империи в 1830-1860-е годы.

Ограниченные (неограниченные) функции. Введём понятие ограниченной функции, оно вводится как ограниченность множества её значений.

Опр. 1. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной сверху* (*снизу*) на множестве $X \subseteq D(f)$, если существует действительное число M (соответственно, m) такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant M$ (соответственно, $f(x) \geqslant m$). В этом случае число M называется *верхней гранью функции*, а число m, соответственно, *нижней гранью функции*.

Опр. 2. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной с двух сторон*, или просто *ограниченной*, на множестве $X \subseteq D(f)$, если найдутся два действительных числа m и M такие, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $m \leqslant f(x) \leqslant M$.[1]

График ограниченной на множестве X функции располагается между (горизонтальными) прямыми $y \equiv m$ и $y \equiv M$, где $x \in X$.

Составляя отрицание определения ограниченной сверху

[1] Иначе: функция $f(x)$ называется *ограниченной на множестве* X, если найдётся положительное действительное число M такое, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant M$.

функции, получим определение функции, не ограниченной сверху на заданном множестве.

Опр. $\overline{1}$. Функция $y = f(x)$ называется *не ограниченной сверху* на множестве $X \subseteq D(f)$, если для любого (сколь угодно большого) действительного числа M найдётся такое значение аргумента $x_0 \in X$, что $f(x_0) > M$.

Опр. $\overline{2}$. Функция $y = f(x)$ называется *не ограниченной* на множестве $X \subseteq D(f)$, если она не ограничена на этом множестве или сверху, или снизу, или с обеих сторон.

Приведём примеры ограниченных и неограниченых функций.

Пример 111. Функции $y = \sin x$, $y = \{x\}$, $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ являются ограниченными на всём множестве действительных чисел, поскольку при всех $x \in \mathbb{R}$ верно $|\sin x| \leqslant 1$, $0 \leqslant \{x\} < 1$, $0 < \dfrac{1}{1+x^2} \leqslant 1$. $\square$

Пример 112. Функции $y = x^2$, $y = |x|$, $y = \sqrt{x}$ являются ограниченными снизу на своей области определения, поскольку при допустимых значениях x выполняются неравенства $x^2 \geqslant 0$, $|x| \geqslant 0$, $\sqrt{x} \geqslant 0$. $\square$

Пример 113. Функции $y = 2x^3 - x + 4$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = 5x - \operatorname{arcctg} x$ не являются ограниченными ни снизу, ни сверху на своей области определения. $\square$

На разных участках области определения функция может задаваться аналитически разными формулами.

Пример 114. Так, функция может быть задана следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{если } x < 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ x^2 - 4, & \text{если } x > 0. \end{cases} \square$$

Пример 115. Другой пример – функция Дирихлé:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x - \text{рационально}; \\ 0, & \text{если } x - \text{иррационально}. \end{cases} \square$$

Точные грани функции. По аналогии с ограниченными множествами, для функций вводятся понятия точных граней

– как точные грани множества значений функции.

Опр. 3. Наибольшая из нижних граней m функции называется её *точной нижней гранью* и обозначается

$$m^* = \inf_{x \in X} f(x).$$

Аналогично, наименьшая из всех верхних граней M носит название *точной верхней грани функции* и обозначается

$$M^* = \sup_{x \in X} f(x).$$

Приведём другое определение точных граней функции.

Опр. 4. Число M^* называется *точной верхней гранью функции* $y = f(x)$ на множестве $X \subseteq D(f)$, если:

1) при всех $x \in X$ верно $f(x) \leqslant M^*$;

2) $\forall \varepsilon > 0$ найдётся такое число $x' \in X$, что $f(x') > M^* - \varepsilon$.

Обозначение: $M^* = \sup\limits_{x \in X} f(x)$.

Аналогично может быть определена точная нижняя грань $m^* = \inf\limits_{x \in X} f(x)$.

Пример 116. Точные грани функции $y = \operatorname{arctg} x$:

$$\inf_{x \in X} y(x) = -\frac{\pi}{2}, \quad \sup_{x \in X} y(x) = \frac{\pi}{2}. \ \square$$

Если функция не является ограниченной сверху (снизу), то её точная верхняя (точная нижняя) грань считается по определению равной $+\infty$ ($-\infty$).

Опр. 5. Разность $M^* - m^*$ между точными гранями функции на множестве X называется *колебанием функции* на этом множестве.

Пример 117. Колебание функции сигнум $y = \operatorname{sgn} x$ на множестве $\mathbb{R}$ равно 2. $\square$

Если точные грани функции достигаются, то они называются наибольшим и наименьшим значениями функции. Приведём соответствующие определения.

Опр. 6. Число M называется *наибольшим значением функции* $y = f(x)$ на множестве $X \subseteq D(f)$, если:

1) при всех $x \in X$ верно $f(x) \leqslant M$;

2) найдётся такое число $x_0 \in X$, что $f(x_0) = M$.

Обозначение: $M = \max\limits_{x \in X} f(x)$.

Аналогично определяется наименьшее значение функции $m = \min\limits_{x \in X} f(x)$ на заданном множестве.

Пример 118. Найти точную нижнюю грань функции

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 10.$$

Достигается ли она?

Решение. Группируя первый множитель с четвёртым, а второй с третьим и раскрывая скобки в каждой такой группе, получаем

$$f(x) = (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) + 10.$$

Обозначим $t = x^2 - 5x + 5$, тогда функция примет вид

$$g(t) = (t-1)(t+1) + 10 = t^2 + 9 \geqslant 9,$$

причём неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $t = 0$, т. е. $x^2 - 5x + 5 = 0$, откуда находим точки минимума.

Ответ: $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 9$ и достигается в точках $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$. $\square$

9.4 Предел функции по Гейне и Коши. Односторонние пределы. Необходимое и достаточное условие существования предела в точке

Предел функции – одно из основных по важности понятий математического анализа. На нём основаны такие фундаментальные понятия, как непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость. Понятие предела на интуитивном уровне использовалось ещё во второй половине XVII века Ньютоном, а также математиками XVIII века, такими как Эйлер и Лагранж. Первые строгие определения предела последовательности дали Больцано в 1816 году и Коши в 1821 году.

Изучение понятия предела обычно начинают с пределов последовательностей, и уже затем переходят к пределам функ-

ций. Предел функции обобщает понятие предела последовательности, что особенно хорошо видно из определения предела функции на языке последовательностей. Предел последовательности, в свою очередь, можно рассматривать как предел функции натурального аргумента. Приведём необходимые определения.

Начнём с понятия предела функции в точке. Предел может быть (если существует) как конечным, так и бесконечным. Как x, так и $f(x)$ могут стремиться к конечному числу или к бесконечности (без знака или с любым знаком), поэтому, в отличие от последовательностей, в случае с функциями количество разных определений предела становится больше.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X, и $a \in \mathbb{R}$ – предельная точка X.

Двусторонние пределы.

Опр. 1 (конечного предела функции в конечной точке по Коши́, или на языке «$\varepsilon - \delta$»). Число $b \in \mathbb{R}$ называется *пределом*, или *предельным значением*, функции $f(x)$ в точке $x = a$, если для любого (сколь угодно малого) положительного числа ε найдётся такое (вообще говоря, зависящее от ε и точки a) число $\delta > 0$, что для любого $x \in D(f)$ из проколотой δ-окрестности точки a выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Это определение на языке кванторов:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \overset{def}{\Leftrightarrow}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon, a) > 0 : \; \forall x \in D_f, \; 0 < |x - a| < \delta \; \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Обозначение: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, или $f(x) \to b$ при $x \to a$.

Проще говоря, предел $f(x)$ в точке $x = a$ – это значение, которое стремится принять функция (но не обязательно принимает), когда её аргумент приближается к a. При этом, определена ли функция в самой точке, и если определена, то какое значение принимает – неважно.

Замечание 1. Проколотая δ-окрестность точки $x = a$ задаётся неравенством $0 < |x - a| < \delta$. Точку a выкалывают, так

как функция может быть не определена в этой точке, но при этом иметь в ней предел.

Составим теперь *отрицание* данного выше определения.

Опр. $\overline{1}$. Число $b \in \mathbb{R}$ не является пределом функции $f(x)$ в точке $x = a$, если существует положительное число ε такое, что для любого (сколь угодно малого) положительного δ найдётся x из множества D_f, принадлежащее проколотой δ-окрестности точки a, для которого значение функции отличается от числа b по модулю не меньше, чем на ε: $|f(x) - b| \geq \varepsilon$.

Или, в компактной форме:

$$\lim_{x \to a} f(x) \neq b \overset{def}{\Leftrightarrow}$$

$$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in D_f, \ 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - b| \geq \varepsilon.$$

Приведём теперь эквивалентное определение предела функции в точке на языке последовательностей.

Опр. 2 (конечного предела функции в конечной точке по Гéйне).[1] Число $b \in \mathbb{R}$ называется *пределом* функции $f(x)$ в точке $x = a$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента, сходящейся к a и состоящей из точек, отличных от a, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к числу b.

Это же определение на языке кванторов:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \overset{def}{\Leftrightarrow} \ \forall x_n \in D_f, \, x_n \neq a : \ \{x_n\} \to a \Rightarrow \{f(x_n)\} \to b.$$

Замечание 2. Полезно представить себе такой наглядный *графический образ* предела функции: возьмём произвольную точку $M(x, f(x))$ на графике функции (чтобы её абсцисса была близка к a, при этом не важно, слева или справа от a находится x), и начнём перемещать эту точку, оставаясь на графике,

[1] *Гейне* Генрих Эдуард (1821–1881) – немецкий математик, ученик Дирихле. Его именем названы теорема Кантора–Гейне (функция, непрерывная на компакте, равномерно непрерывна на нём), лемма Гейне–Бореля о конечном покрытии (в любой системе интервалов, покрывающей отрезок, существует конечная подсистема, покрывающая этот отрезок), определение предела функции по Гейне.

устремив её первую координату к значению a. Если функция имеет конечный предел b при $x \to a$, то вторая координата точки M (ордината) как раз будет приближаться вдоль оси Oy к значению b. Иными слова, точка $M(x, f(x))$ будет стремиться занять положение некоторой предельной точки $M_0(a, b)$, ордината которой и есть искомый предел функции. При этом, как отмечалось выше, функция $f(x)$ может даже не быть определена при $x = a$ (т. е. реальная точка $M_0(a, b)$ на графике может вовсе не существовать, M_0 – всего лишь предельная точка графика).

Составим *отрицание* сформулированного выше определения предела по Гейне.

Опр. $\overline{2}$. Число b не является пределом функции $f(x)$ в точке $x = a$, если найдётся последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ значений аргумента, сходящаяся к a и состоящая из точек, отличных от a, такая, что соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ значений функции не сходится к b, т. е.

$$\lim_{x \to a} f(x) \neq b \overset{def}{\Leftrightarrow}$$

$$\exists \{x_n\},\ x_n \in D_f,\ x_n \neq a :\ \{x_n\} \to a \ \Rightarrow\ \{f(x_n)\} \nrightarrow b.$$

Замечание 3. Существуют и другие определения предела функции. Например, определение конечного предела можно сформулировать в эквивалентном виде на языке окрестностей: число $b \in \mathbb{R}$ называется пределом функции f при x, стремящемся к a, если для любой окрестности $V(b)$ точки b существует проколотая окрестность $\overset{\circ}{\mathrm{U}}(a)$ точки a такая, что её образ $f\left(\overset{\circ}{\mathrm{U}}(a)\right)$ принадлежит $V(b)$:

$$\forall\, V(b)\ \exists\, \overset{\circ}{\mathrm{U}}(a) :\ x \in \overset{\circ}{\mathrm{U}}(a) \Rightarrow f(x) \in V(b).$$

Сформулируем определение бесконечного предела.

Опр. 3 (бесконечного предела функции в конечной точке по Коши́). Говорят, что предел функции $f(x)$ в точке a равен ∞ (соответственно, $+\infty$, $-\infty$), если для любого (сколь угодно большого) положительного числа E найдётся такое[1] число

[1] Вообще говоря, зависящее от E и a.

$\delta = \delta(E, a) > 0$, что как только $x \in D(f)$ оказывается в проколотой δ-окрестности точки a, то выполняется неравенство

$$|f(x)| > E \quad (\text{соответственно, } f(x) > E,\ \ f(x) < -E).$$

В этом случае функцию $f(x)$ называют *бесконечно большой* в точке $x = a$.

Опр. 4 (бесконечного предела функции в конечной точке по Гейне). Говорят, что предел функции $f(x)$ в точке a равен ∞ (соответственно, $+\infty$, $-\infty$), если для любой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента, сходящейся к a и состоящей из точек, отличных от a, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ стремится к ∞ (соответственно, к $+\infty$, $-\infty$).

Обозначения: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, или $f(x) \to \infty$ при $x \to a$;

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty, \text{ или } f(x) \to +\infty \text{ при } x \to a;$$
$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty, \text{ или } f(x) \to -\infty \text{ при } x \to a.$$

Наряду с рассмотренными выше существуют понятия предела функции (конечного или бесконечного) при $x \to \infty$.

Сформулируем соответствующие определения. Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности бесконечно удалённой точки ∞ (являющейся предельной для области её определения).[1]

Опр. 5 (конечного предела функции по Коши́ при $x \to \infty$). Число $b \in \mathbb{R}$ называется *пределом* функции $f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдётся такое (вообще говоря, зависящее от ε) число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что как только $|x| > \delta$, то выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

На языке кванторов:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \overset{def}{\Leftrightarrow}$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x \in D_f,\ |x| > \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - b| < \varepsilon.$$

[1] В качестве окрестности точки $x = \infty$ выступает множество $|x| > \delta$.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$, или $f(x) \to b$ при $x \to \infty$. Предел $f(x)$ при $x \to \infty$ также часто записывают как $f(\infty)$. Наличие конечного предела при $x \to \infty$ означает наличие горизонтальной асимптоты у графика функции.

Опр. 6 (бесконечного предела функции в бесконечно удалённой точке по Коши). Говорят, что предел функции $f(x)$ при $x \to \infty$ равен ∞ ($+\infty$, $-\infty$), если для любого (сколь угодно большого) положительного числа E найдётся такое (вообще говоря, зависящее от E) число $\delta = \delta(E) > 0$, что как только $|x| > \delta$, то выполняется неравенство

$$|f(x)| > E \text{ (соответственно, } f(x) > E,\ f(x) < -E).$$

Обозначения: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, или $f(x) \to \infty$ при $x \to \infty$, или, соответственно,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty, \text{ или } f(x) \to +\infty \text{ при } x \to \infty;$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty, \text{ или } f(x) \to -\infty \text{ при } x \to \infty.$$

Иначе: $f(\infty) = \infty$, $f(\infty) = +\infty$, $f(\infty) = -\infty$.

Односторонние пределы. Данные выше определения касались случаев, когда функция определена как слева, так и справа от точки $x = a$, т. е. в двустронней окрестности. Также предполагалось, что значения функции могут приближаться к своему пределу как снизу, так и сверху. Такие пределы называют двусторонними пределами.

В общем случае может оказаться, что функция определена лишь справа (или, наоборот, лишь слева) от точки a, т. е. в односторонней окрестности, и поэтому аргумент может стремиться к своему предельному значению a лишь с какой-то одной стороны – слева или справа (вдоль оси абсцисс). Аналогично, значение функции $f(x)$ может приближаться к пределу b только сверху или, наоборот, только снизу (вдоль оси ординат). Тогда речь может идти о существовании односторонних пределов.

Приведём соответствующие определения.

Опр. 7 (конечного предела функции по Коши́ справа (слева) от заданной точки a). Число $b \in \mathbb{R}$ называется *пределом*

справа (соответственно, *слева*) функции $f(x)$ в точке a, если для любого (сколь угодно малого) положительного числа ε найдётся такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого $x \in D(f)$ из правой (левой) полуокрестности точки a (т. е. $a < x < a + \delta$ или, соответственно, $a - \delta < x < a$) выполняется неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

На языке кванторов определение левого предела имеет вид:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = b \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x_n \in D_f,\ x_n < a\ \{x_n\} \to a\ \Rightarrow\ \{f(x_n)\} \to b.$$

Обозначения для правого предела:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = b, \quad \text{или } f(x) \to b \text{ при } x \to a + 0;$$

и, соотвественно, для левого предела:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = b, \quad \text{или } f(x) \to b \text{ при } x \to a - 0.$$

Или, короче, $f(a + 0) = b$ и $f(a - 0) = b$.

Опр. 8 (конечного предела функции по Коши́ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$). Говорят, что функция $f(x)$ имеет при $x \to +\infty$ (соответственно, $x \to -\infty$) конечный предел, равный b, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдётся такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого $x \in D(f)$ такого, что $x > \delta$ (соответственно, $x < -\delta$) выполняется неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Обозначения: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$, или $f(x) \to b$ при $x \to +\infty$; и, соответственно,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b, \quad \text{или } f(x) \to b \text{ при } x \to -\infty.$$

Или, короче, $f(+\infty) = b$ и $f(-\infty) = b$.

Наконец, приведём определения предела *снизу* (для случая предела *сверху* сделайте это самостоятельно).

Опр. 9 (конечного предела функции снизу по Коши при $x \to a$). Говорят, что функция $f(x)$ стремится к числу $b \in \mathbb{R}$ *снизу* при x, стремящемся к a, если для любого положительного ε найдётся зависящее от ε и a положительное δ такое, что для любого $x \in D_f$, принадлежащего проколотой δ-

окрестности точки a, значение функции в точке x принадлежит нижней проколотой ε-полуокрестности точки b:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b - 0 \overset{def}{\Leftrightarrow}$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon, a) > 0 : \forall x \in D_f, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow 0 < b - f(x) < \varepsilon.$$

Опр. 10 (конечного предела функции снизу по Гейне при $x \to a$). Говорят, что функция $f(x)$ стремится к числу $b \in \mathbb{R}$ *снизу* при x, стремящемся к a, если для любой последовательности значений аргумента $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходящейся к a и состоящей из точек множества D_f, отличных от a, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ стремится к b снизу, т. е.

$$\lim_{x\to a} f(x) = b - 0 \quad \overset{def}{\Leftrightarrow}$$

$$\forall x_n \in D_f,\ x_n \neq a,\ \ \{x_n\} \to a\ \Rightarrow\ f(x_n) < b\ \text{ и }\ \{f(x_n)\} \to b.$$

Другое обозначение: $f(x) \to b - 0$ при $x \to a$.

Теорема 1 (*необходимое и достаточное условие существования предела в точке*). Предел функции $f(x)$ в точке $x = a$ существует тогда и только тогда, когда в этой точке существуют оба односторонних предела и они равны, и тогда:

$$f(a) = f(a - 0) = f(a + 0).$$

Замечание. В случае с бесконечной предельной точкой $x = \infty$, как и в случае с конечной точкой $x = a$, имеет место аналогичное утверждение: для того чтобы существовал предел $f(x)$ при $x \to \infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовали и были равны между собой пределы $f(x)$ при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$:

$$f(\infty) = f(+\infty) = f(-\infty).$$

Сформулируем теперь для функций теорему, аналогичную теореме Вейерштрасса о сходимости монотонной ограниченной числовой последовательности.

Теорема 2 (*о существовании предела у монотонной ограниченной функции*). Пусть функция $f(x)$ не убывает на конечном или бесконечном интервале (a, b). Если она ограничена сверху числом M, то существует конечный предел

$\lim\limits_{x\to b-0} f(x) \leqslant M$. Если же она не ограничена сверху, то $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = +\infty$.

Существует теорема, обобщающая этот результат.

Теорема 3. Если функция $f(x)$ не убывает на отрезке $[a, b]$, то в каждой точке $x \in (a, b)$ существуют пределы $f(x-0)$ и $f(x+0)$ и выполняются неравенства

$$f(x-0) \leqslant f(x) \leqslant f(x+0).$$

Существуют также пределы $f(a+0)$, $f(b-0)$, удовлетворяющие неравенствам:

$$f(a) \leqslant f(a+0), \quad f(b-0) \leqslant f(b).$$

9.5 Свойства пределов

«Если человек действительно чего-то захочет, то вся Вселенная будет способствовать тому, чтобы его желание сбылось».

Пауло Коэльо (род. 1947) – бразильский прозаик и поэт. Опубликовал в общей сложности более 20 книг - романы, комментированные антологии, сборники коротких рассказов-притч. В России прославился после издания «Алхимика», долго остававшегося в первой десятке бестселлеров.

Пусть каждая из двух функций $f(x)$ и $g(x)$ имеет конечный предел в точке $x = a$. Тогда справедливы следующие свойства.

1. Предел суммы (разности) равен сумме (разности) пределов:

$$\left(\lim_{x\to a} f(x) = b\right) \wedge \left(\lim_{x\to a} g(x) = c\right) \Rightarrow \lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = b \pm c.$$

2. Предел произведения равен произведению пределов:

$$\left(\lim_{x\to a} f(x) = b\right) \wedge \left(\lim_{x\to a} g(x) = c\right) \Rightarrow \lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c.$$

3. Предел частного равен частному пределов:

$$\left(\lim_{x\to a} f(x) = b\right) \wedge \left(\lim_{x\to a} g(x) = c \neq 0\right) \;\Rightarrow\; \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}.$$

4. Единственность предела:

$$\left(\lim_{x\to a} f(x) = b\right) \wedge \left(\lim_{x\to a} f(x) = c\right) \;\Rightarrow\; b = c.$$

5. Локальное сохранение знака функцией, имеющей предел:

$$\left(\lim_{x\to a} f(x) = b\right) \wedge (b > c) \Rightarrow \left(\exists \delta > 0 :\ \forall x \in \overset{\circ}{\mathrm{U}}_\delta(a)\ \ f(x) > c\right).$$

В частности, функция, имеющая в точке a положительный (отрицательный) предел, остается положительной (отрицательной) в некоторой окрестности предельной точки:

$$\left(\lim_{x\to a} f(x) = b > 0\right) \;\Rightarrow\; \left(\exists \delta > 0 :\ \forall x \in \overset{\circ}{\mathrm{U}}_\delta(a) \cap D_f\ \ f(x) > 0\right).$$

6. Функция, имеющая предел, локально ограничена в окрестности предельной точки:

$$\left(\lim_{x\to a} f(x) = b > 0\right) \;\Rightarrow$$

$$\left(\exists \delta > 0\ \exists M > 0 :\ \ \forall x \in \overset{\circ}{\mathrm{U}}_\delta(a) \cap D_f\ \ |f(x)| \leq M\right).$$

7. Операция взятия предела сохраняет нестрогие неравенства:

$$\left(\exists \delta > 0\ \ \forall x \in \overset{\circ}{\mathrm{U}}_\delta(a) \cap D_f\ \ f(x) \leq g(x)\right) \wedge \left(\lim_{x\to a} f(x) = b\right)$$

$$\wedge \left(\lim_{x\to a} g(x) = c\right) \Rightarrow b \leq c.$$

9.6 Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Бесконечно малые и бесконечно большие в точке функции.

Опр. 1. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой в точке* a, если предел этой функции в точке a равен нулю.

Пример 119. Функция $\alpha(x) = (x-a)^n$, где n – любое натуральное число, может служить примером бесконечно малой в точке a функции. $\square$

Заметим, что если функция $f(x)$ имеет предел в точке a, равный числу b, то функция $\alpha(x) = f(x) - b$ является бесконечно малой в точке a.

Сформулированное утверждение приводит к следующему *специальному представлению* для функции $f(x)$, имеющий равный $f(x)$ предел в точке a:

$$f(x) = b + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – некоторая бесконечно малая в точке a функция.

Опр. 2. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно большой в точке* a справа (слева) функцией, если для любой, сходящейся к a последовательности $\{x_n\}$ значения аргумента, все элементы которой больше (меньше) a, соответствующая последовательность значений функции $\{\alpha(x_n)\}$ является бесконечно большой последовательностью, все элементы которой, начиная с некоторого номера, либо положительны, либо отрицательны.

Для бесконечно больших в точке a справа (слева) функций используется следующая символика:

$$\lim_{x\to a+0} \alpha(x) = +\infty \quad (\text{или } \lim_{x\to a-0} \alpha(x) = +\infty),$$

или

$$\lim_{x\to a+0} \alpha(x) = -\infty \quad (\text{или } \lim_{x\to a-0} \alpha(x) = -\infty).$$

Иногда вместо этого пишут более лаконично:

$$\alpha(a+0) = -\infty \quad \text{или} \quad \alpha(a-0) = -\infty.$$

Пример 120. Функция $\alpha(x) = \dfrac{1}{(x-a)^2}$ является бесконечно большой в точке a функцией, так как $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{(x-a)^2} = +\infty$. $\square$

На следующем семинаре мы познакомимся с приёмами и методами вычисления пределов функций.

9.7 Задачи для самостоятельного решения

Задачи на монотонные функции:

№379. Объяснить, опираясь на определение монотонной функции, почему функция Дирихле не является монотонной на всей числовой прямой.

Задачи на ограниченность и точные грани функции:

№380. [6, № 381] Показать, что функция Римана, определяемая условиями:
1) $f(x) = n$, если $x = \dfrac{m}{n}$, где m и n – взаимно простые числа и $n \in \mathbb{N}$;
2) $f(x) = 0$, если x – иррационально,
конечна (принимает конечные значения), но не ограничена в каждой точке x (т. е. не ограничена в любой окрестности этой точки).

№381. [6, № 383] Показать, что функция $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x^4}$ ограничена в интервале $-\infty < x < +\infty$.

№382. [6, № 384] Показать, что функция $f(x) = \dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$ не ограничена в любой окрестности точки $x = 0$, однако не является бесконечно большой при $x \to 0$.

№383. [6, № 385] Исследовать на ограниченность в интервале $(0, \varepsilon)$ функцию

$$f(x) = \ln x \cdot \sin^2 \frac{\pi}{x}.$$

№384. [6, № 386] Показать, что функция $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ в области $0 \leqslant x < +\infty$ имеет точную нижнюю грань $m = 0$ и точную верхнюю грань $M = 1$.

№385. [6, № 388] Определить точные верхнюю и нижнюю грани функции $f(x) = x^2$ на полуинтервале $[-2, 5)$.

№386. [6, № 389] Определить точные верхнюю и нижнюю грани на $(-\infty, +\infty)$ функции

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

№387. [6, № 397] Определить колебание функции $f(x) = x^2$ на интервале $(1, 3)$.

№388. [6, № 399] Пусть $m[f]$ и $M[f]$ – соответственно точные нижняя и верхняя грани функции $f(x)$ на промежутке (a, b). Доказать, что если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – функции, определённые на (a, b), то справедливы неравенства

$$m[f_1 + f_2] \geqslant m[f_1] + m[f_2] \quad \text{и } M[f_1 + f_2] \leqslant M[f_1] + M[f_2].$$

Построить примеры функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, для которых в последних соотношениях имеет место: а) случай равенства; б) случай неравенства.

Задачи на доказательство пределов по определению:

Доказать, используя определение предела по Коши (с помощью «$\varepsilon - \delta$» рассуждений):

№389. [6, № 401] $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$;

№390. $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$;

№391. $\lim\limits_{x\to 8} \sqrt[3]{x} = 2$;

№392. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$;

№393. $\lim\limits_{x\to \pi} \cos x = -1$.

№394. Как доказать, что $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \arcsin x = \dfrac{\pi}{6}$, используя принцип взаимно обратных функций?

Задачи на формулировки определений:

№395. [6, № 403] Сформулировать на языке «$\varepsilon - \delta$» следующие утверждения (и привести примеры):

а) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$; б) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b$; в) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b$.

№396. [6, № 404] Сформулировать определения следующих пределов (на языке неравенств) и привести примеры:

а) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = b$; б) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = b$; в) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = b$.

№397. [6, № 405] Сформулировать определения следующих пределов (на языке неравенств) и привести примеры:

а) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$; б) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$; в) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$;

г) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$; д) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=-\infty$;

е) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=+\infty$; ж) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$;

з) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=-\infty$; и) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=+\infty$.

№398. [6, № 406] Сформулировать определения следующих пределов (на языке неравенств) и привести примеры:

а) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=\infty$; б) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=-\infty$; в) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=+\infty$;

г) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\infty$; д) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$;

е) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$; ж) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\infty$;

з) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$; и) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$.

№399. [6, № 407(б,д,л)] Пусть $y=f(x)$. Сформулировать определения следующих пределов (на языке неравенств):

1) $y\to b-0$ при $x\to a-0$;

2) $y\to b+0$ при $x\to a-0$;

3) $y\to b+0$ при $x\to -\infty$.

Разные задачи:

№400. [6, № 409] Пусть есть дробно-рациональная функция

$$R(x)=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0},$$

где $a_n\neq 0$, $b_m\neq 0$. Доказать, что

$$\lim_{x\to\infty}|R(x)|=\begin{cases}+\infty, & \text{если } n>m;\\ |\frac{a_n}{b_n}|, & \text{если } n=m;\\ 0, & \text{если } n<m.\end{cases}$$

№401. [6, № 410] Пусть $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ алгебраические многочлены от x, причём $P(a)=Q(a)=0$. Какие значения может принимать предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$?

№402. Верны ли утверждения:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+bx+c}{px^3+qx^2+rx+s}=0$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{px^2+qx+r}=\infty$?

Может ли, наоборот, первый предел равняться ∞, а второй – 0?

№403. [6, № 411] Вычислить предельные значения функции

$$f(x)=\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$$

в точках: а) $x=0$; б) $x=1$; в) $x=\infty$.

№404. Найти точную нижнюю грань функции:

$$f(x)=\frac{x^4+2x^3+3x^2+2x+2}{x^2+x+1},\ x\in\mathbb{R}.$$

Достигается ли она? Если да, то указать, при каких x.

Используя неравенство Коши, решить задачи:

№405. Доказать ограниченность функции снизу, найдя её точную нижнюю грань:

$$f(x)=x^2+\frac{1}{3x^6},\ x\neq 0.$$

№406. Найти точную верхнюю грань функции

$y=(1-x)^5(1+2x)^2(1+x)$ на отрезке $[-0,5;1]$.

Используя неравенство Коши–Буняковского, найти точную верхнюю грань функций:

№407. $y=a\sin x+b\cos x,\ x\in\mathbb{R}$;

№408. $y=\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{3-x}$.

Используя неравенство Бернулли, решить задачу:

№409. Найти точную верхнюю грань функции

$$f(x)=\sqrt{1-\frac{x}{3}}+\sqrt[6]{1+x}.$$

9.8 Ответы и решения

379. Если выбрать точки $-\sqrt{2} = x_1 < x_2 = 0$, тогда $0 = f(x_1) < f(x_2) = 1$. В то же время, если взять $0 = x_1 < x_2 = \sqrt{2}$, то получим $1 = f(x_1) > f(x_2) = 0$. Это противоречит определению монотонной функции. Если бы данная функция была монотонной, то при любом выборе точек $x_1 < x_2$ знак в неравенстве, связывающем $f(x_1)$ и $f(x_2)$, сохранялся бы.

380. а) Если x – рационально, т. е. $x = \dfrac{m}{n}$ – несократимая дробь, то точки $p_k = \dfrac{k \cdot m + 1}{k \cdot n} \to \dfrac{m}{n}$ при $k \to +\infty$. При этом $f(p_k) = k \cdot n \to +\infty$ при $k \to +\infty$, поэтому функция не ограничена в сколь угодно малой окрестности точки x.
б) Пусть x – иррационально, т. е. $x = \alpha$. Тогда существует последовательность рациональных чисел $p_i = \dfrac{m_i}{n_i}$, $i = 1, 2, ..$, сходящаяся к α, при этом $\lim\limits_{i \to +\infty} n_i = +\infty$. Поскольку $f(\frac{m_i}{n_i}) = n_i \to +\infty$ при $i \to +\infty$, а точки последовательности $\{\frac{m_i}{n_i}\}$ попадают в любую окрестность точки α, то функция не ограничена и в окрестности любой такой точки.

381. Функция ограничена снизу, т. к. $f(x) > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Покажем, что $f(x)$ ограничена сверху.

1-й способ. В самом деле, из неравенства $(1-x^2)^2 \geqslant 0$ имеем $\dfrac{x^2}{1+x^4} \leqslant \dfrac{1}{2}$, а поскольку $1 + x^4 \geqslant 1$, то получим

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4} = \frac{1}{1+x^4} + \frac{x^2}{1+x^4} \leqslant 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

2-й способ. Можно рассмотреть задачу: «Найти, при каких M неравенство $\dfrac{1+x^2}{1+x^4} \leqslant M$ выполняется при всех $x \in \mathbb{R}$?»

382. Пусть $x_n = \dfrac{2}{\pi n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Тогда при $n \to +\infty$ значения x_n попадают в любую окрестность точки $x = 0$. Но $\lim\limits_{n \to +\infty} |f(x_{2n})| = +\infty$, а $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_{2n-1}) = 0$.

383. Так как $0 \leqslant \sin^2 \dfrac{\pi}{x} \leqslant 1$, а функция $\ln x$ монотонно возрастает, то $f(x) \leqslant \max\{0, \ln \varepsilon\}$, т. е. $f(x)$ ограничена свер-

ху. Далее, положим $x_n = \dfrac{2}{2n+1}$. Тогда, начиная с некоторого номера n_0, все x_n попадают в интервал $(0, \varepsilon)$. При этом $f(x_n) = \ln \frac{2}{2n+1} \to -\infty$ при $n \to +\infty$, т. е. функция $f(x)$ не ограничена снизу.

384. 1) Покажем, что точная нижняя грань функции равна 0. В самом деле, очевидно, что $f(x) = \dfrac{x}{1+x} \geqslant 0$ при $0 \leqslant x < +\infty$. Возьмём произвольное ε такое, что $0 < \varepsilon < 1$, тогда $f(x) = \dfrac{x}{1+x} < \varepsilon$ при $0 < x < \dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$. Следовательно, $\inf\limits_{x \geqslant 0} f(x) = 0$.

2) Покажем, что точная верхняя грань функции равна 1. Действительно, $f(x) = \dfrac{x}{1+x} < 1$ при $0 \leqslant x < +\infty$. С другой стороны, для указанного ε имеем $f(x) = \dfrac{x}{1+x} > 1 - \varepsilon$ при $x > \dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$, т. е. $\sup\limits_{x \geqslant 0} f(x) = 1$.

385. Покажем, что $\inf\limits_{x \in [-2,5)} \{x^2\} = 0$. Для этого убедимся в выполнении двух условий из определения точной нижней грани: 1) $\forall\, x \in [-2, 5)\ x^2 \geqslant 0$; 2) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x' \in [-2, 5) : x'^2 < 0 + \varepsilon$ (в качестве x' можно взять любое число из промежутка $[0, \sqrt{\varepsilon})$).

Аналогично, $\sup\limits_{x \in [-2,5)} \{x^2\} = 25$, так как: 1) $\forall\, x \in [-2, 5)$ $x^2 \leqslant 25$; 2) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x'' \in [-2, 5)$: $x''^2 > 25 - \varepsilon$ (достаточно взять $x'' \in (\sqrt{25 - \varepsilon}, 5]$).

386. Имеем $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} \{f(x)\} = 1$, причём он достигается при $x = 0$; $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}} \{f(x)\} = 0$, причём точная нижняя грань не достигается ни при каком x. Докажите это, используя определения точных граней.

387. На данном интервале функция $f(x) = x^2$ монотонно возрастает, поэтому у неё существуют конечные пределы на концах интервалов. Доопределяя функцию $f(x)$ в концах интервалов этими предельными значениями, получим $M^* - m^* = f(3 - 0) - f(1 + 0) = 9 - 1 = 8$.

388. а) Докажем неравенство. Обозначим $m_1 =$

$\inf\limits_{a<x<b}\{f_1(x)\}, m_2 = \inf\limits_{a<x<b}\{f_2(x)\}$. Тогда $\forall\, x \in (a,b)\ f_1(x) \geqslant m_1$ и $f_2(x) \geqslant m_2$. Сложим эти неравенства: $f_1(x) + f_2(x) \geqslant m_1 + m_2$, отсюда

$$m[f_1 + f_2] \geqslant m_1 + m_2 = m[f_1] + m[f_2].$$

б) Обозначим теперь $M_1 = \sup\limits_{a<x<b}\{f_1(x)\}, M_2 = \sup\limits_{a<x<b}\{f_2(x)\}$. Тогда $\forall\, x \in (a,b)\ f_1(x) \leqslant M_1$ и $f_2(x) \leqslant M_2$. Складывая неравенства, получим $f_1(x) + f_2(x) \leqslant M_1 + M_2$, откуда

$$M[f_1 + f_2] \leqslant M_1 + M_2 = M[f_1] + M[f_2].$$

Пример для случая неравенства: $f_1 = \sin x$, $f_2 = \cos x$, $x \in (-\pi, \pi)$. Пример для случая равенства приведите самостоятельно.

389. Воспользуемся определением предела функции. Достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого x такого, что $0 < |x-2| < \delta$, выполняется неравенство $|x^2 - 4| < \varepsilon$. В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$ – произвольно малое число. Тогда

$$|x^2-4| = |(x-2)(x+2)| = |x-2||(x-2)+4| \leqslant$$
$$\leqslant |x-2|(|x-2|+4) < \delta(\delta+4) < \varepsilon,$$

как только $0 < |x-2| < \delta$. Решая последнее неравенство относительно δ, находим, что в качестве δ в определении можно взять любое число из интервала $(0, \sqrt{4+\varepsilon}-2)$. Таким образом, мы показали как по заданному ε выбрать $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, чтобы выполнялось определение.

390. Покажем, что выполняется определение:

$$\lim_{x\to 4}\sqrt{x} = 2 \overset{def}{\Leftrightarrow}$$

$$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0:\ \forall x \in \mathbb{R},\ 0 < |x-4| < \delta\ \Rightarrow\ |\sqrt{x}-2| < \varepsilon.$$

В самом деле, имеем

$$|\sqrt{x}-2| = \left|\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}+2}\right| = \frac{|x-4|}{\sqrt{x}+2} < |x-4| < \delta < \varepsilon.$$

Зафиксируем произвольно малое $\varepsilon > 0$, тогда если выбрать $\delta < \varepsilon$, то в силу приведённой цепочки неравенств определение выполнено, а значит, утверждение доказано.

391. По определению, $\lim\limits_{x\to 8} \sqrt[3]{x} = 2 \overset{def}{\Leftrightarrow}$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x \in \mathbb{R},\ 0 < |x-8| < \delta\ \Rightarrow\ |\sqrt[3]{x} - 2| < \varepsilon.$$

Поскольку $|\sqrt[3]{x} - 2| =$

$$\left| \frac{(\sqrt[3]{x} - 2)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4} \right| = \frac{|x-8|}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4} < |x-8| < \delta < \varepsilon,$$

то для произвольно малого $\varepsilon > 0$, если выбрать $\delta < \varepsilon$, то в силу приведённой цепочки неравенств определение выполнено, а значит, утверждение доказано.

392. По определению, $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1 \overset{def}{\Leftrightarrow}$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x \in \mathbb{R},\ 0 < |x - \frac{\pi}{2}| < \delta\ \Rightarrow\ |\sin x - 1| < \varepsilon.$$

Поскольку $|\sin x - 1| = \left|\sin x - \sin \frac{\pi}{2}\right| = \left|2 \sin \frac{x-\frac{\pi}{2}}{2} \cos \frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\right| = 2\left|\sin \frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\right| \left|\cos \frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\right| \le 2\left|\sin \frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\right| \le 2\left|\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\right| = \left|x - \frac{\pi}{2}\right| < \delta < \varepsilon$, то для произвольно малого $\varepsilon > 0$ достаточно выбрать $\delta < \varepsilon$, и тогда определение выполняется, следовательно, утверждение доказано.

393. По определению, $\lim\limits_{x\to \pi} \cos x = -1 \overset{def}{\Leftrightarrow}$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x-\pi| < \delta \Rightarrow |\cos x - (-1)| < \varepsilon.$$

Поскольку $|\cos x - (-1)| = |\cos x - \cos \pi| = \left|-2 \sin \frac{x-\pi}{2} \sin \frac{x+\pi}{2}\right| = 2\left|\sin \frac{x-\pi}{2}\right| \left|\sin \frac{x+\pi}{2}\right| \le 2\left|\sin \frac{x-\pi}{2}\right| \le 2\left|\frac{x-\pi}{2}\right| = |x - \pi| < \delta < \varepsilon$, то для произвольного $\varepsilon > 0$ достаточно выбрать $\delta < \varepsilon$, и тогда определение выполняется, следовательно, утверждение доказано.

394. Доказательство данного предела по определению достаточно затруднительно. Рассмотрим другой подход, который

здесь проще. Функции $y = \arcsin x$ ($x \in [-1, 1]$) и $y = \sin x$ ($x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) являются взаимно обратными и осуществляют взаимно однозначное отображение своей области определения на множество значений. Поэтому доказательство того, что $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \arcsin x = \frac{\pi}{6}$, эквивалентно доказательству факта $\lim\limits_{\arcsin x \to \frac{\pi}{6}} x = \frac{1}{2}$. Сделаем в последнем пределе замену $y = \arcsin x$: $\lim\limits_{y \to \frac{\pi}{6}} \sin y = \frac{1}{2}$. Докажем это по определению предела функции в точке. Имеем: $\lim\limits_{y \to \frac{\pi}{6}} \sin y = \frac{1}{2} \overset{def}{\Leftrightarrow}$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \; \forall y \in \mathbb{R}, \; 0 < \left| y - \tfrac{\pi}{6} \right| < \delta \; \Rightarrow \; \left| \sin y - \tfrac{1}{2} \right| < \varepsilon.$$

Поскольку $\left| \sin y - \frac{1}{2} \right| = \left| \sin y - \sin \frac{\pi}{6} \right| = \left| 2 \sin \frac{y - \frac{\pi}{6}}{2} \cos \frac{y + \frac{\pi}{6}}{2} \right| = 2 \left| \sin \frac{y - \frac{\pi}{6}}{2} \right| \left| \cos \frac{y + \frac{\pi}{6}}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{y - \frac{\pi}{6}}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{y - \frac{\pi}{6}}{2} \right| = \left| y - \frac{\pi}{6} \right| < \delta < \varepsilon$, то для произвольно малого $\varepsilon > 0$ достаточно выбрать $\delta < \varepsilon$, и тогда определение выполняется, следовательно, утверждение доказано.

395. а) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) \colon \forall x \in D(f), \; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$;

б) $\lim\limits_{x \to a - 0} f(x) = b \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) \colon \forall x \in D(f), \; a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$;

в) $\lim\limits_{x \to a - 0} f(x) = b \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) \colon \forall x \in D(f), \; a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

396. а) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \; \exists E = E(\varepsilon) > 0 \colon \forall x \in D(f), \; |x| > E \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$;

б) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \; \exists E = E(\varepsilon) > 0 \colon \forall x \in D(f), \; x < -E \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$;

в) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \; \exists E = E(\varepsilon) > 0 \colon \forall x \in D(f), \; x > E \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

Примеры: а) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$; б) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{|x|}{x} = -1$; в) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{|x|}{x} = 1$. Но $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{|x|}{x}$ не существует.

397. а) $\forall E > 0\ \exists \delta = \delta(E) > 0$: $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > E$;
б) $\forall E > 0\ \exists \delta = \delta(E) > 0$: $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -E$;
в) $\forall E > 0\ \exists \delta = \delta(E) > 0$: $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > E$;
г) $\forall E > 0\ \exists \delta = \delta(E) > 0$: $a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x)| > E$;
д) $\forall E > 0\ \exists \delta = \delta(E) > 0$: $a - \delta < x < a \Rightarrow f(x) < -E$;
е) $\forall E > 0\ \exists \delta = \delta(E) > 0$: $a - \delta < x < a \Rightarrow f(x) > E$;
ж) $\forall E > 0\ \exists \delta = \delta(E) > 0$: $a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x)| > E$;
з) $\forall E > 0\ \exists \delta = \delta(E) > 0$: $a < x < a + \delta \Rightarrow f(x) < -E$;
и) $\forall E > 0\ \exists \delta = \delta(E) > 0$: $a < x < a + \delta \Rightarrow f(x) > E$.

398. а) $\forall E > 0\ \exists \delta = \delta(E) > 0$: $|x| > \delta \Rightarrow |f(x)| > E$;
б) $\forall E > 0\ \exists \delta = \delta(E) > 0$: $|x| > \delta \Rightarrow f(x) < -E$;
в) $\forall E > 0\ \exists \delta = \delta(E) > 0$: $|x| > \delta \Rightarrow f(x) > E$;
г) $\forall E > 0\ \exists \delta = \delta(E) > 0$: $x < -\delta \Rightarrow |f(x)| > E$;
д) $\forall E > 0\ \exists \delta = \delta(E) > 0$: $x < -\delta \Rightarrow f(x) < -E$;
е) $\forall E > 0\ \exists \delta = \delta(E) > 0$: $x < -\delta \Rightarrow f(x) > E$;
ж) $\forall E > 0\ \exists \delta = \delta(E) > 0$: $x > \delta \Rightarrow |f(x)| > E$;
з) $\forall E > 0\ \exists \delta = \delta(E) > 0$: $x > \delta \Rightarrow f(x) < -E$;
и) $\forall E > 0\ \exists \delta = \delta(E) > 0$: $x > \delta \Rightarrow f(x) > E$.

399. Имеем:
1) $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall\, x \in (a - \delta, a) \Rightarrow f(x) \in (b - \varepsilon, b)$;
2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall\, x \in (a - \delta, a) \Rightarrow f(x) \in (b, b + \varepsilon)$;
3) $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall\, x \in (-\infty, -\delta) \Rightarrow f(x) \in (b, b + \varepsilon)$.

400. Рассмотрим $|R(x)|$ и вынесем за скобку в числителе и знаменателе дроби наибольшую степень x:

$$|R(x)| = \left| \frac{x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)}{x^m \left(b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \ldots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m}\right)} \right| =$$

$$= |x^{n-m}| \cdot \left| \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \ldots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m}} \right|.$$

Если $n > m$, то $|x^{n-m}| \to +\infty$, а дробь стремится к числу $\left|\frac{a_n}{b_m}\right|$, поэтому $|R(x)| \to +\infty$. Если $n = m$, то $|R(x)| \to \left|\frac{a_n}{b_m}\right|$.

Если $n < m$, то $|x^{n-m}| \to 0$, а дробь по-прежнему стремится к $\left|\frac{a_n}{b_m}\right|$, поэтому $|R(x)| \to 0$.

401. 1) Возможно, что $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=0$, например

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+1)}{x-1}=0.$$

2) Может быть $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\infty$, например

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}=\infty.$$

3) Также может быть, что $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=C\,(\neq 0)$, например

$$\lim_{x\to 1}\frac{C(x-1)}{x-1}=C.$$

402. а) Утверждение верно при $p\neq 0$: б) утверждение верно при $a\neq 0$. Если же $p=q=0$, $a\neq 0$, то первый предел равен ∞. При $p\neq 0$, $a=b=0$ второй предел равен 0.

403. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=1$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(2x+1)(x-1)}=\dfrac{2}{3}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{2}$.

404. Делением числителя на знаменатель получаем:

$$y=x^2+x+1+\frac{1}{x^2+x+1}\geq 2.$$

Согласно неравенству о сумме двух положительных взаимно обратных чисел получаем, что наименьшее значение достигается $\Leftrightarrow x^2+x+1=1$, т. е. при $x=-1;0$.

Ответ: $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}}f(x)=2$, достигается при $x\in\{-1;0\}$.

405. Представим функцию в виде $f(x)=\dfrac{1}{3}\left(3x^2+\dfrac{1}{x^6}\right)=$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{x^2+x^2+x^2+\frac{1}{x^6}}{4}\geq\frac{4}{3}\cdot\sqrt[4]{x^2\cdot x^2\cdot x^2\cdot\frac{1}{x^6}}=\frac{4}{3},$$

причём неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $x^2 = 1/x^6$, т. е. при $x = \pm 1$.

406. На данном отрезке числа $1 - x, 1 + 2x, 1 + x$ неотрицательны. По неравенству Коши для восьми чисел:

$$(1-x)^5(1+2x)^2(1+x) \leq \left(\frac{5(1-x)+2(1+2x)+(1+x)}{8}\right)^8 = 1,$$

причём супремум (наибольшее значение) достигается $\Leftrightarrow$ $1 - x = 1 + 2x = 1 + x \Leftrightarrow x = 0$.

407. Имеем:

$$y = a\sin x + b\cos x \leq \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = \sqrt{a^2+b^2},$$

причём наибольшее значение достигается, если $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, т. е. при $\operatorname{tg} x = a/b$.

408. Воспользуемся неравенством Коши–Буняковского

$$a_1a_2 + b_1b_2 \leqslant \sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2},$$

положив в нем $a_1 = \sqrt{x}$, $b_1 = \sqrt{3-x}$, $a_2 = 1$, $b_2 = 1$:

$$\sqrt{x}\cdot 1 + \sqrt{3-x}\cdot 1 \leqslant \sqrt{x+(3-x)}\cdot\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{6}.$$

Ещё раз применим это неравенство, положив теперь $a_1 = \sqrt[4]{x}$, $b_1 = \sqrt[4]{3-x}$, $a_2 = 1$, $b_2 = 1$:

$$\sqrt[4]{x}\cdot 1 + \sqrt[4]{3-x}\cdot 1 \leqslant \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{3-x}}\cdot\sqrt{1^2+1^2} \leqslant \sqrt[4]{6}\cdot\sqrt{2} = \sqrt[4]{24}.$$

409. Имеем $\left(1-\dfrac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}} + (1+x)^{\frac{1}{6}} \leq \left(1-\dfrac{x}{6}\right) + \left(1+\dfrac{x}{6}\right) = 2$, причём равенство достигается при $x = 0$.

10 СЕМИНАР: Приёмы и методы вычисления пределов функций

«Правильному применению методов можно научиться только применяя их на разнообразных примерах».

Г. Цейтен (1839—1920), датский математик и историк математики.

Домашнее задание: 411, 412, 414, 416, 420–422, 424–426, 430, 432, 434, 436, 437, 439, 441, 446, 448, 450, 453, 454, 458, 459, 461, 463, 468, 472, 474, 476, 478.

Пусть в некоторой точке необходимо вычислить предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Ознакомимся с видами пределов, их особенностями, приёмами и методами их вычисления.

Пределы можно подразделить на две группы: содержащие неопределённости какого-либо вида и не содержащие неопределённостей. Остановимся подробнее на каждом из этих случаев.

Те из приёмов, которые опираются на ещё не пройденный материалы (например, правило Лопиталя, формула Тейлора), мы лишь упомянем в перечислении методов, но подробнее вернёмся к ним позже, когда будет пройден соответствующий материал.

10.1 Пределы, не содержащие неопределённостей

Вычисление любого предела $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ начинается, вообще говоря, с попытки непосредственно подставить в функцию $f(x)$ под знаком предела вместо переменной x её предельное значение $x = a$ (включая случаи бесконечно удалённых точек $a = \pm\infty$, ∞). Таким способом вычисляются:

– пределы функций $f(x)$, непрерывных в точке a, у которых $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(\lim\limits_{x\to a} x)$:

- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin x - x}{3 + x^2} = \dfrac{\sin 1 - 1}{4}$;

- $\lim\limits_{x\to -3}|x| = 3$;

– односторонние пределы функций, непрерывных только с одной стороны – слева или справа:[1]

- $\lim\limits_{x\to 2+0}[x] = 2$; $\lim\limits_{x\to 2-0}[x] = 1$;
- $\lim\limits_{x\to 2+0}\{x\} = 0$; $\lim\limits_{x\to 2-0}\{x\} = 1$;

– и другие пределы (односторонние и двусторонние, конечные и бесконечные), вычисляемые однозначно:

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x} = \infty$;
- $\lim\limits_{x\to +0} e^{-\frac{1}{x}} = 0$, $\lim\limits_{x\to -0} e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$;
- $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x = 0$; $\lim\limits_{x\to +\infty} 3^x = +\infty$; но $\lim\limits_{x\to +\infty} 1^x = 1$;
- $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+0}\operatorname{tg} x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-0}\operatorname{tg} x = +\infty$;
- $\lim\limits_{x\to \pi+0}\operatorname{ctg} x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to \pi-0}\operatorname{ctg} x = -\infty$.

Вычислить пределы:

№410. $\lim\limits_{x\to 1} 2^{[x]}$, где $[x]$ – целая часть x;

№411. [6, № 510] $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}+0}\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{8}+x\right)\right)^{\operatorname{tg} 2x}$;

№412. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$;

№413. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right)^{x}$.

10.2 Применение 1-го, 2-го замечательных и других известных (табличных) пределов

Некоторые пределы играют в математическом анализе важную роль и имеют специальные названия:

[1] Понятие непрерывности функции в точке будет рассмотрено позже, но мы упоминаем здесь этот класс пределов – для полноты изложения.

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (*1-й замечательный предел*, или замечательный тригонометрический предел);
- $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$ (*2-й замечательный предел*, или замечательный показательно-степенно́й предел);
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$ $(a>0)$, в частности $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ (замечательный показательный предел);
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ (замечательный степенной предел), в частности $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\dfrac{1}{n}$ $(n=2,3,...)$,
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ (замечательный логарифмический предел).

Важную роль играют также пределы, основанные на сравнении скорости роста элементарных функций:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{a^x}=0$ $(a>1,n>0)$ (показательная функция на бесконечности растёт быстрее степенной);
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a x}{x^k}=0$ $(a>1,k>0)$ (степенна́я функция на бесконечности растёт быстрее логарифмической), и как следствие:
- $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\log_a x}{\frac{1}{x^\varepsilon}}=0$ $(\varepsilon>0)$ (степенная функция $\dfrac{1}{x^\varepsilon}$ в окрестности нуля растёт быстрее логарифмической), или, что то же самое:
- $\lim\limits_{x\to+0}(x^\varepsilon\log_a x)=0$ $(\varepsilon>0)$ (степенная функция x^ε в окрестности нуля стремиться к нулю быстрее, чем логарифмическая – к бесконечности).

К этим и другим известным пределам сводится вычисление многих пределов, при этом в зависимости от вида выражения под знаком предела могут понадобиться любые алгебраические, тригонометрические, логарифмические и прочие преобразования и формулы.

Пример 121. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1$$

(использовано определение тангенса, затем предел представлен в виде произведения двух конечных пределов, один из которых – 1-й замечательный). □

Пример 122. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)^x=\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{1}{e}$$

(применён алгебраический приём одновременного деления числителя и знаменателя дроби на одно и то же выражение x, в результате предел сведён ко 2-му замечательному пределу). □

Вычислить пределы функций:

№414. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$ $(ab\neq 0)$;

№415. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$;

№416. [6, № 529] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

10.3 Раскрытие неопределённостей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ путём сокращения дроби на общий множитель, являющийся причиной неопределённости

Часто при попытке подставить $x=a$ в функцию под знаком предела $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (перейти к пределу) возникают осложнения, а именно, обнаруживаются неопределённости, требующие умения их грамотно раскрыть.

Так, если в процессе вычислении предела $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ выясняется, что при $x\to a$ одновременно $f(x)\to 0$ и $g(x)\to 0$, то

говорят, что в точке $x = a$ имеется неопределённость вида $\frac{0}{0}$. В этом случае предел может существовать и принимать любое значение (как конечное, так и бесконечное). Раскрыть неопределённость в такой ситуации означает найти значение этого предела или доказать, что он не существует.

Примером неопределённости вида $\frac{0}{0}$ является первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Для раскрытия данного вида неопределённостей в ряде случаев можно выделить общий множитель в числителе и знаменателе дроби, являющийся причиной неопределённости, и сократить на него. В этот момент неопределённость исчезает, и предел вычисляется непосредственной подстановкой.

Пример 123. Найти предел $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+6x+8}{x^3+8}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+6x+8}{x^3+8} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(x+2)(x+4)}{(x+2)(x^2-2x+4)} =$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{x+4}{x^2-2x+4} = \frac{1}{6}. \ \square$$

Пример 124. Найти предел $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3+5}{2x^2-3}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3+5}{2x^2-3} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2(x+\frac{5}{x^2})}{x^2(2-\frac{3}{x^2})} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x+\frac{5}{x^2}}{2-\frac{3}{x^2}} = \infty. \ \square$

Вычислить пределы:

№417. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^7+5x^6+4x^3}{x^7+2x^3}$;

№418. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^5-1}$;

№419. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+3x^2-4}{x^2-x-6}$;

№420.

а) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$;

№421. [6, № 435] $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$;

№422. [6, № 436] $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$;

№423. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$;

№424. [6, № 493] $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$;

№425. [6, № 424(а)] $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+x^2+...+x^n-n}{x-1}$;

№426. [6, № 424(б)] $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$.

10.4 Домножение (деление) на сопряжённое выражение

В некоторых задачах приём позволяет рационализировать (хотя бы частично) выражение под знаком предела, что часто помогает выявить общий сомножитель, сокращение на который приводит к исчезновению неопределённости. В любом случае, его следует применять, если вычисление предела упрощается.

Пример 125. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)$.

Решение. Имеем $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)\overset{[\infty-\infty]}{=}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{\sqrt{x^2+3x}+x}\overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+3x)-x^2}{x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1}=\frac{3}{2}.\ \square$$

Вычислить пределы:

№427. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$;

№428. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$;

№429. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|2x+1|-1}{x}$;

№430. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}-1}$;

№431. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{2x+1}-3}$;

№432. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{x-1}$.

10.5 Переход к пределу в отдельных сомножителях. Разбиение одного предела на два (несколько) пределов

«Мы не осмеливаемся на многие вещи, потому что они тяжелые, но тяжелые они, потому что мы не осмеливаемся сделать их».

Луций Анней Се́нека (4 год до н.э.—65 год н.э.) – древнеримский философ, поэт и государственный деятель. Воспитатель Нерона.

1. Если требуется вычислить предел произведения или частного двух (конечного числа) функций

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)),$$

причём один из сомножителей имеет конечный и неравный нулю предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, то, как правило, имеет смысл перейти к пределу в этом сомножителе, и уже затем продолжить вычисление оставшегося – ставшего более простым – предела:

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)=A\cdot\lim_{x\to a} g(x).$$

Пример 126. [6, №475] Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cdot\cos x}=$$

(в знаменателе в сомножителе $\cos x$ имеет смысл перейти к пределу, равному единице, упростив вычисляемый предел)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(2\sin^2 \frac{x}{2})}{x^3} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \right) = \frac{1}{2}. \square$$

2. Иногда имеет смысл разбить вычисляемый предел на несколько пределов (если каждый из них существует и конечен).

Пример 127. [6, № 489] Найти предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(a+2x) - 2\cos(a+x) + \cos a}{x^2}.$$

Решение. Применяя формулу косинуса суммы, получаем

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\cos a\cos 2x - \sin a \sin 2x) - 2(\cos a \cos x - \sin a \sin x) + \cos a}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos a(\cos 2x - 2\cos x + 1) + \sin a(2\sin x - \sin 2x)}{x^2} =$$

$$= \cos a \cdot \lim_{x\to 0} \frac{2\cos^2 x - 2\cos x}{x^2} + \sin a \cdot \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{x^2} =$$

$$= \cos a \cdot \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x(\cos x - 1)}{x^2} + \sin a \cdot \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x(1-\cos x)}{x^2} =$$

$$= \cos a \cdot \lim_{x\to 0} \frac{-4\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} + \sin a \cdot \lim_{x\to 0} \frac{4\sin x \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = -\cos a,$$

так как второй из пределов равен нулю. $\square$

Вычислить пределы:

№433. [6, № 496] Найти предел $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{\cos(x+\frac{\pi}{6})}$.

№434. [6, № 499] $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

10.6 Замена переменной под знаком предела

При $x \to a$ можно сделать замену $t = x - a$, при $x \to \infty$ – замену $t = \frac{1}{x}$; при наличии под знаком предела единственного радикала иногда можно принять его за новую переменную (при этом

выражение становится рациональным); если функция под знаком предела содержит обратную функцию, например $\arcsin(\cdot)$, то полагают $t = \arcsin(\cdot)$ и т. д. В целом, замена переменных призвана упростить вычисление пределов.

Рассмотрим примеры.

Пример 128. Найти предел $\lim\limits_{x\to\frac{2\pi}{3}} \dfrac{\sin(x+\frac{\pi}{3})}{2\cos x+1}$.

Решение. Сделаем подстановку $t = x - \frac{2\pi}{3}$:

$$\lim_{x\to\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin(x+\frac{\pi}{3})}{2\cos x+1} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t+\pi)}{2\cos(t+\frac{2\pi}{3})+1} = \lim_{t\to 0} \frac{-\sin t}{-\cos t - \sqrt{3}\sin t + 1} =$$

$$= -\lim_{t\to 0} \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2} - 2\sqrt{3}\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} = -\lim_{t\to 0} \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2} - \sqrt{3}\cos\frac{t}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \ \square$$

Пример 129. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x \cdot \sin\dfrac{1}{x}\right)$.

Решение. Сделаем подстановку $t = 1/x$:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x \cdot \sin\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to+0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Пример 130. [6, № 448] Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

Решение. Положим $a = \sqrt[6]{1+x} \to 1$, $b = \sqrt[6]{1-x} \to 1$, тогда

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{\substack{a\to 1\\ b\to 1}} \frac{a^3-b^3}{a^2-b^2} =$$

$$= \lim_{\substack{a\to 1\\ b\to 1}} \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a-b)(a+b)} = \lim_{\substack{a\to 1\\ b\to 1}} \frac{a^2+ab+b^2}{a+b} = \frac{3}{2}. \ \square$$

Вычислить пределы:

№435. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$. *Указание:* положить $t = \sqrt[3]{1+x}$.

№436. [6, № 444] $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2)$.
Указание: положить $t = \sqrt[n]{1+x}$.

№437. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}$. *Указание:* положить $t = \sqrt[15]{x}$.

№438. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[k]{x}-1}$ $(n,k=2,3,...)$. *Указание:* положить $t=\sqrt[nk]{x}$.

№439. [6, № 455.1] $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$.

№440. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$. *Указание:* положить $t=\operatorname{arctg} x$;

№441. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$. *Указание:* сделать подстановку $t=\arcsin(1-2x)$.

№442. $\lim\limits_{x\to+0}(x\cdot\ln x)$. *Указание:* положить $t=\dfrac{1}{x}$;

№443. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$. *Указание:* положить $t=x-\pi$.

№444. [6, № 495] $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}$.

№445. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(2x-5)}{e^{\sin\pi x}-1}$. *Указание:* положить $t=x-3$.

№446. [6, № 439] $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $(a\neq 0)$.
Указание: положить $t=x-a$.

10.7 Пределы вида $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x))$, где $f(x)$ – бесконечно малая при $x\to a$ функция, а $g(x)$ – ограниченная функция

Такие пределы равны нулю. Рассмотрим примеры.

Пример 131. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos(x^2+3x-1)}{\log_5 x}$.

Решение. Имеем: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos(x^2+3x-1)}{\log_5 x}=0$, так как $\dfrac{1}{\log_5 x}\to 0$ при $x\to+\infty$, а $|\cos(x^2+3x-1)|\leq 1$ при всех $x\in\mathbb{R}$. □

Вычислить пределы:

№447. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\sin\dfrac{1}{x}\right)$;

№448. [6, № 472] $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$;

№449. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{D(x)}{x}$, где $D(x)$ – функция Дирихле;

№450. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]\right)$.

10.8 Использование соотношений эквивалентности

Назовём две бесконечно малые (бесконечно большие) в точке $x=a$ функции $\alpha(x)$ и $\bar{\alpha}(x)$ *эквивалентными* при $x\to a$, если[1]

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\bar{\alpha}(x)}=1.$$

Обозначение: $\alpha(x)\sim\bar{\alpha}(x)$. Эквивалентные функции ведут себя похожим образом в достаточно малой окрестности точки $x=a$.

Из приведённого определения следует, что при вычислении пределов вида[2]

$$\lim_{x\to a}\alpha(x),\quad \lim_{x\to a}(\alpha(x)\beta(x)),\quad \lim_{n\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\quad \text{и т. д.}$$

можно заменять все (или некоторые) бесконечно малые (большие) множители на эквивалентные им, что не влияет на значение предела, но может существенно упростить его вычисление:

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=\lim_{x\to a}\bar{\alpha}(x),\quad \lim_{x\to a}(\alpha(x)\beta(x))=\lim_{x\to a}(\bar{\alpha}(x)\bar{\beta}(x)),$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(a)}{\beta(a)}=\lim_{x\to a}\frac{\bar{\alpha}(x)}{\bar{\beta}(x)},$$

где $\alpha(x)\sim\bar{\alpha}(x)$, $\beta(x)\sim\bar{\beta}(x)$. Этот приём используют при раскрытии неопределённостей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ или просто для упрощения выражения под знаком предела.

---

[1] Здесь a может быть как числом, так и символом бесконечности, а функция $\bar{\alpha}(x)$ не обращается в нуль в достаточно малой окрестности точки $x=a$.

[2] В общем случае под знаком предела может находиться произведение или частное любого конечного числа сомножителей.

Приведём наиболее известные соотношения эквивалентности, справедливые при $x \to 0$:

$$\sin x \sim x, \quad \operatorname{tg} x \sim x, \quad \arcsin x \sim x,$$

$$\operatorname{arctg} x \sim x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad \ln(1+x) \sim x,$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a \ \ (a > 0, a \neq 1), \quad e^x - 1 \sim x.$$

$$(1+x)^a \sim 1 + ax \quad (a \in \mathbb{R}).$$

Замечание. Как отмечалось выше в теме последовательностей, эти соотношения следуют из разложений элементарных функций по формуле Тейлора (Маклорена) и позже будут доказаны в курсе математического анализа. Пока мы будем использовать указанные соотношения эквивалентности, приняв их к сведению (без доказательства). Их смысл – замена общего члена б. м. (или б. б.) функции, по сути, её главным членом, что приводит к упрощению вычисления предела.

Пример 132. Доказать, что $\operatorname{sh} x \sim x$ при $x \to 0$.

Решение. В самом деле, $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, поэтому задача сводится к доказательству равенства единице предела

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} - 1}{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} + \lim_{-x\to 0} \frac{e^{-x} - 1}{-x}\right) = \frac{1}{2}(1+1) = 1.$$

Здесь использовался показательный предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$. $\square$

Пример 133. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{2}{x}}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{2}{x}} \overset{[1^\infty]}{=} \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{2}{x}\ln(1+\sin x)} \overset{[\infty\cdot 0]}{=} e^{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x}} =$

$$= e^{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = e^2.$$

Здесь было использовано соотношение $\ln(1+t) \sim t$ при $t \to 0$. $\square$

Вычислить пределы:

№451. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$;

№452. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{x+1}$;

№453. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(\frac{x^2+x+1}{x+1}\right)}{x^2}$;

№454. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2+\lg x}{2+\lg(x+1)}$;

№455. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sin 6x-\sin 7x}$;

№456. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x-\cos 7x}{x^2}$;

№457. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$;

№458. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{th}(x^3-5x)}{2x^3+7x^2}$;

№459. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right)$.

10.9 Пределы вида $\lim\limits_{x\to a}(f(x)^{g(x)})$, где $f(x)\to 1$, а $g(x)\to\infty$ при $x\to a$

Наиболее известным представителем неопределённостей вида 1^∞ является второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$. Рассмотрим два способа вычисления данных пределов.

1-й способ (переход к основанию e). Пусть необходимо вычислить предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$, где при $x\to a$ функция $f(x)$ в основании степени стремится к 1, а функция $g(x)$ в показателе степени – к бесконечности (с любым знаком или без него). В результате перехода к основанию e

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)},$$

возможного в силу непрерывности экспоненциальной функции,

задача сводится к вычислинию предела $\lim\limits_{x\to a}(g(x)\ln f(x))$, при этом неопределённость вида 1^{∞} трансформируется в неопределённость $\infty\cdot 0$.

2-й способ (сведение ко 2-му замечательному пределу).

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)^{g(x)}) = \lim_{x\to x_0}\left((1+(f(x)-1))^{\frac{1}{f(x)-1}}\right)^{(f(x)-1)g(x)} = \\ = e^{\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-1)g(x)}.$$

Этот способ на практике удобнее, т. к. в сравнении с предыдущим способом не приводит к возникновению логарифма, т. е. с вычислительной точки зрения оказывается проще.

Пример 134. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{x+1}$.

Решение. Применяя второй подход, сразу получаем простой предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{x+1} \overset{[1^{\infty}]}{=} e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}-1\right)(x+1)} = \\ = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4(x+1)}{2x-1}} = e^2.$$

Если бы мы воспользовались первым способом решения, то переходя к основанию e, получили бы

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{x+1} \overset{[1^{\infty}]}{=} e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)\ln\frac{2x+3}{2x-1}} \overset{[\infty\cdot 0]}{=} e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)\ln\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)}$$

(используем соотношение эквивалентности $\ln(1+t)\sim t$)

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)\frac{4}{2x-1}} = e^2. \square$$

Вычислить пределы:

№460. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{\sin(x^2)}}$;

№461. [6, № 525] $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$;

№462. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{1+x}{1+\sqrt{x}}}$;

№463. [6, № 512] $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$;

№464. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+2}\right)^{x-1}$.

10.10 Когда предел не существует или зависит от параметра

«Век живи, век учись».

Луций Анней Се́нека (4 год до н.э.—65 год н.э.) – древнеримский философ.

Если предел не существует, то это требуется обосновать.

Выше мы рассматривали предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$, который не существует по причине неравенства односторонних пределов (при $x\to\pm\infty$). В любом случае, если значение предела зависит от того, каким образом переменная стремится к своему предельному значению, то такой предел не существует.

Приведём ещё один пример.

Пример 135. Доказать, что предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ не существует.

Решение. Воспользуемся определением предела по Гейне: если этот предел существует, то *для любой* последовательности значений аргумента $\{x_n\}$, $x_n\to+\infty$, соответствующая последовательность значений функции $f(x_n)$ сходится к этому числу. В данном случае если выбрать $x'_n=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, то $f(x'_n)\to 1$, а если взять другую последовательность $x''_n=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, то $f(x''_n)\to -1$, что противоречит единственности предела. □

Вообще, у периодических функций, отличных от постоянных, предел на бесконечности не существует.

Ещё одна причина того, что (двусторонний) предел не существует, состоит в том, что функция определена лишь справа (или только слева) от заданной точки.

Доказать, что предел не существует:

№465. $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$;

№466. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\sin x}$;

№467. $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{tg} x$;

№468. $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\operatorname{tg}\dfrac{3}{\sqrt{2}-x}$;

№469. $\lim\limits_{x\to -1}\arcsin x$;

№470. $\lim\limits_{x\to n}[x]$, где $n\in\mathbb{Z}$, $[x]$ – целая часть x;

№471. $\lim\limits_{x\to n}\{x\}$, где $n\in\mathbb{Z}$, $\{x\}$ – дробная часть x;

№472. $\lim\limits_{x\to x_0}D(x)$, где $D(x)=1$, если x – рационально, $D(x)=0$, если x – иррационально (функция Дирихле), $x_0\in\mathbb{R}$;

№473. $\lim\limits_{x\to 1}2^{[x]}$, где $[x]$ – целая часть x;

№474. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\sin x}{2+\sin(x+1)}$;

№475. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt[3]{x^3+2}}{7x+\sqrt[4]{x^4+1}}$;

№476. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)^{\operatorname{ctg}\pi x}$;

№477. [6, № 506] $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$, если:

$$1)\ a=0;\quad 2)\ a=1;\quad 3)\ a=+\infty.$$

№478. При всех a найти предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{ax}-x}{x-a}$.

10.11 (*)Вычисление пределов $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ для дифференцируемых в точке a функций

Пусть требуется вычислить предел вида $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Вспомним, как определяется производная функции $f(x)$ в точ-

ке a. Это предел $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Иными словами, задача вычисления предела в данном случае эквивалентна задаче нахождения производной $f'(a)$ в точке a.

Данный способ пока будем использовать как дополнительный способ решения (до ознакомления с темой, связанной с дифференцируемостью функций одной переменной), но примем во внимание, что для данного класса пределов этот способ существует и часто бывает эффективен.

Пример 136. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\cos x - \cos a}{x - a}$.

Решение. Данный предел, очевидно, равен производной функции $\cos x$, вычисленной в точке $x = a$, т. е. $f'(a) = (-\sin x)\Big|_{x=a} = -\sin a$. $\square$

Проверь свои знания:

№479. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4}}{x - 1}$.

№480. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\lg(1 + x^2) - x - 4}{x + 3}$.

10.12 (*)Вычисление пределов функций с помощью разложений по формуле Тейлора (для дифференцируемых функций)

Данный способ будет рассмотрен позже – после ознакомления с темой, связанной с дифференцируемостью функций одной переменной.

10.13 (*)Правило Лопиталя для дифференцируемых функций

Данный способ будет рассмотрен после ознакомления с темой дифференцируемости функций одной переменной.

10.14 Ответы и решения

410. Имеем $\lim\limits_{x\to 1+0} 2^{[x]} = 2^1 = 2$, в то время как $\lim\limits_{x\to 1-0} 2^{[x]} = 2^0 = 1$. Неравенство односторонних пределов означает, что искомый предел не существует.

411. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}+0} \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right)^{\operatorname{tg} 2x} = 0$, так как при $x \to \frac{\pi}{4}+0$ имеем $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right) \to \operatorname{tg}\frac{3\pi}{8} > \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, а $\operatorname{tg} 2x \to -\infty$.

412. Имеем $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{x-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}}{x-\frac{1}{2}}\right)\right)^{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2}+\frac{5}{2(2x-1)}\right)^{x^2}$. Поскольку $\frac{1}{2}+\frac{5}{2(2x-1)} \to \frac{1}{2}$, а $x^2 \to +\infty$, то предел равен $\left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$.

413. Перейдем в выражении под знаком предела к экспоненте в основании степени: $\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)^x = e^{x\ln\frac{2x+1}{x+1}}$. Так как при $x \to +\infty$ $\ln\frac{2x+1}{x+1} \to \ln 2$, то $x\ln\frac{2x+1}{x+1} \to +\infty$, и предел также равен $+\infty$.

414. Имеем $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin ax}{ax}\cdot\frac{ax}{bx}\cdot\frac{bx}{\sin bx}\right) = \frac{a}{b}$.

415. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2} = 1\cdot 0 = 0$$

(использована тригонометрическая формула повышения степени, после чего предел преобразован в произведение двух пределов, первый из которых – 1-й замечательный).

416. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\tfrac{1}{x}\cdot\ln(1+x)\right) = \lim_{x\to 0}\ln((1+x)^{\frac{1}{x}}) = \ln e = 1$$

(множитель $\frac{1}{x}$ внесён под знак логарифма, в результате предел сведён ко 2-му замечательному пределу).

417. Имеем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3(x^4+5x^3+4)}{x^3(x^4+2)}\overset{[\frac{0}{0}]}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4+5x^3+4}{x^4+2}=2.$

418. Имеем $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^5-1}\overset{[\frac{0}{0}]}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}=\frac{3}{5}.$$

419. Имеем $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2-4}{x^2-x-6}\overset{[\frac{0}{0}]}{=}\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x-1)(x+2)^2}{(x+2)(x-3)}=0.$

420. Имеем неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x+1}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}=1;$$

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(1+\frac{1}{x})}$
$=-1;$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x+1}$ – значение этого предела зависит от способа стремления переменной x к бесконечности (к $+\infty$ или $-\infty$), что противоречит единственности предела. Данный предел не существует.

421. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}\overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x(1+\frac{1}{x}\sqrt{x+\sqrt{x}})}}{\sqrt{x(1+\frac{1}{x})}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x(1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}})}}{\sqrt{x(1+\frac{1}{x})}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=1.$$

422. Вынося общий множитель за скобку и сокращая на

него, получаем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}\overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{x^{1/6}}+\frac{1}{x^{1/4}}\right)}{\sqrt{x}\sqrt{2+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

423. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}\overset{[\frac{0}{0}]}{=}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-1}{\cos x+\sin x}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

424. Раскладывая на множители и сокращая, получаем

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}\overset{[\frac{0}{0}]}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2(\sin x+1)(\sin x-\frac{1}{2})}{2(\sin x-1)(\sin x-\frac{1}{2})}=-3.$$

425. Преобразуем выражение под знаком предела:

$$\lim_{x\to1}\frac{x+x^2+...+x^n-n}{x-1}\overset{[\frac{0}{0}]}{=}\lim_{x\to1}\frac{(x-1)+(x^2-1)+...+(x^n-1)}{x-1}=$$

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)+(x-1)(x+1)+...+(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+...+1)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to1}(1+(x+1)+...+(x^{n-1}+x^{n-2}+...+1))=$$

$$=1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

426. Так как $x^{100}-2x+1=(x^{100}-x)+(1-x)=x(x^{99}-1)-(x-1)$ $=(x-1)(x(x^{98}+...+1)-1)=(x-1)(x^{99}+x^{98}+...+x-1)$, $x^{50}-2x+1=...=(x-1)(x^{49}+x^{48}+...+x-1)$, то имеем:

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^{99}+x^{98}+...+x-1)}{(x-1)(x^{49}+x^{48}+...+x-1)}\overset{[\frac{0}{0}]}{=}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^{99}+x^{98}+...+x-1}{x^{49}+x^{48}+...+x-1}=\frac{98}{48}=\frac{49}{24}.$$

427. Умножим и разделим на сопряжённое выражение:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\overset{[\infty-\infty]}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=0.$$

428. Умножим и разделим на сопряжённое выражение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}\overset{[\frac{0}{0}]}{=}\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{x}=\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x}+1)=2.$$

429. Умножим и разделим на сопряжённое выражение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{|2x+1|-1}{x}\overset{[\frac{0}{0}]}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(|2x+1|-1)(|2x+1|+1)}{x(|2x+1|+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(2x+1)^2-1}{x(|2x+1|+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(4x+4)}{x(|2x+1|+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4x+4}{|2x+1|+1}=2.$$

430. Умножим и разделим на сопряжённое выражение:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}-1}\overset{[\frac{0}{0}]}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}(x+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)=6.$$

431. Имеем

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{2x+1}-3}\overset{[\frac{0}{0}]}{=}\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{2x+1}+3)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}{(\sqrt{x}+2)(2x-8)}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}+3}{2(\sqrt{x}+2)}=\frac{3}{4}.$$

432. Имеем $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{x-1}\overset{[\frac{0}{0}]}{=}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2})}{(x-1)}\cdot$$

$$\cdot\frac{(\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{2x-1}\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{(3x-2)^2})}{(\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{2x-1}\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{(3x-2)^2})}=$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(2x-1)-(3x-2)}{(x-1)(\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{2x-1}\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{(3x-2)^2})} =$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{-(x-1)}{(x-1)(\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{2x-1}\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{(3x-2)^2})} =$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{-1}{\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{2x-1}\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{(3x-2)^2}} = -\frac{1}{3}.$$

433. Имеем

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{\cos(x+\frac{\pi}{6})} = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg} x(\operatorname{tg}^2 x - 3)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-(x+\frac{\pi}{6})\right)} =$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} (\operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x+\sqrt{3}))\cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg} x-\sqrt{3}}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)} =$$

(так как множители $\operatorname{tg} x$ и $(\operatorname{tg} x+\sqrt{3})$ имеют конечные пределы, которые не равны нулю, то перейдём в них к пределу, тем самым упростив задачу, и продолжим вычислять оставшийся предел)

$$= 6\cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)} = 6\cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\sin\frac{\pi}{3}}{\cos x\cos\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)} =$$
$$= 6\cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x\cos\frac{\pi}{3}}\cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)} =$$

(в знаменателе в сомножителе $\cos x$ переходим к пределу, окончательно упростив вычисляемый предел)

$$= -6\cdot 4\cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)} = -24.$$

434. Умножая и деля на сопряжённое выражение, получаем

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x})(\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+\sqrt{1+\sin x})}{x^3(\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+\sqrt{1+\sin x})} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3(\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+\sqrt{1+\sin x})} =$$

(так как $(\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+\sqrt{1+\sin x}) \to 2$)

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3 \cdot \cos x} =$$

(так как $\cos x \to 1$)

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cdot 2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^3} = \frac{1}{4} \cdot \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2} \right) = \frac{1}{4}.$$

435. Сделаем рационализирующую подстановку $t = \sqrt[3]{1+x}$ $\Rightarrow x = t^3 - 1$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} = \lim_{t\to 1} \frac{t-1}{t^3-1} = \lim_{t\to 1} \frac{t-1}{(t-1)(t^2+t+1)} =$$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{1}{t^2+t+1} = \frac{1}{3}.$$

436. Положим $t = \sqrt[n]{1+x}$, тогда $x = t^n - 1$ и получаем

$$\lim_{t\to 1} \frac{t-1}{t^n-1} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{t\to 1} \frac{t-1}{(t-1)(t^{n-1}+t^{n-2}+...+t+1)} =$$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{1}{t^{n-1}+...+t+1} = \frac{1}{n}.$$

437. Пусть $t = \sqrt[15]{x}$, тогда

$$\lim_{t\to 1} \frac{1-t^5}{1-t^3} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{t\to 1} \frac{(t-1)(t^4+t^3+t^2+t+1)}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{5}{3}.$$

438. Пусть $t = \sqrt[nk]{x}$, т. е. $x = t^{nk}$, тогда

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[k]{x}-1} = \lim_{t\to 1} \frac{t^k-1}{t^n-1} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{t\to 1} \frac{(t-1)(t^{k-1}+t^{k-2}+...+1)}{(t-1)(t^{n-1}+t^{n-2}+...+1)} = \frac{k}{n}.$$

439. Положим $t = \sqrt[6]{x}$, тогда

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{3}{1-\sqrt{x}} - \frac{2}{1-\sqrt[3]{x}} \right) \overset{[\infty-\infty]}{=} \lim_{x\to 1} \frac{3(1-\sqrt[3]{x})-2(1-\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})} \overset{[\frac{0}{0}]}{=}$$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{3(1-t^2)-2(1-t^3)}{(1-t^3)(1-t^2)} = \lim_{t\to 1} \frac{2t^3-3t^2+1}{(1-t^3)(1-t^2)} =$$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{(2t+1)(t-1)^2}{(t-1)^2(t^2+t+1)(t+1)} = \lim_{t\to 1} \frac{2t+1}{(t^2+t+1)(t+1)} = \frac{1}{2}.$$

440. Сделаем подстановку $t = \operatorname{arctg} x$, тогда $x = \operatorname{tg} t$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\operatorname{tg} t} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} \cdot \lim_{t\to 0} \cos t = 1.$$

441. Пусть $t = \arcsin(1-2x)$, тогда $\sin t = 1-2x$, $x = \frac{1}{2}(1-\sin t)$. Имеем

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{\arcsin(1-2x)}{(2x-1)(2x+1)} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{(-\sin t)(2-\sin t)} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{t\to 0} \frac{1}{\sin t - 2} = -\frac{1}{2}.$$

442. Сделаем подстановку $t = \dfrac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to +0} (x \cdot \ln x) = \lim_{t\to +\infty} \frac{-\ln t}{t} = 0.$$

(степенна́я функция на бесконечности растёт быстрее логарифмической).

443. Положим $t = x - \pi$, тогда

$$\lim_{x\to \pi} \frac{\sin 2x}{\sin 5x} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\sin(2t+2\pi)}{\sin(5t+5\pi)} = -\lim_{t\to 0} \frac{\sin 2t}{\sin 5t} =$$

$$= -\lim_{t\to 0} \frac{\sin 2t}{2t} \cdot \frac{5t}{\sin 5t} \cdot \frac{2}{5} = -\frac{2}{5}.$$

444. Положим $t = x - \frac{\pi}{3}$, тогда

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{1-2\cos(t+\frac{\pi}{3})} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{1-\cos t+\sqrt{3}\sin t} = \lim_{t\to 0} \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}+2\sqrt{3}\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}+\sqrt{3}\cos\frac{t}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

445. Положим $t = x - 3$, тогда

$$\lim_{x\to 3}\frac{\ln(2x-5)}{e^{\sin\pi x}-1}\overset{[\frac{0}{0}]}{=}\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+2t)}{e^{-\sin\pi t}-1}=\lim_{t\to 0}\frac{2t}{e^{-\sin\pi t}-1}=$$
$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{2t}{-\sin\pi t}\cdot\frac{-\sin\pi t}{e^{-\sin\pi t}-1}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{2t}{-\sin\pi t}=-\frac{2}{\pi}.$$

446. Положим $t=x-a$, тогда

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}\overset{[\frac{0}{0}]}{=}\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{a+t}-\sqrt{a}+\sqrt{t}}{\sqrt{t}\cdot\sqrt{t+2a}}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{\sqrt{a+t}+\sqrt{a}}+\sqrt{t}}{\sqrt{t}\cdot\sqrt{t+2a}}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{a+t}+\sqrt{a}}+1}{\sqrt{t+2a}}=\frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

447. Имеем: $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\sin\dfrac{1}{x}\right)=0$, так как $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\le 1$, а $x\to 0$ при $x\to 0$.

448. Имеем $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$, так как $|\sin x|\le 1$, $\dfrac{1}{x}\to 0$ при $x\to\infty$.

449. Так как $|D(x)|\le 1$, $\frac{1}{x}\to 0$ при $x\to+\infty$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{D(x)}{x}=0$.

450. Имеем $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]\right)=\left|t=\frac{1}{x}\right|=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{[t]}{t}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t-\{t\}}{t}=$
$\lim\limits_{t\to\infty}\left(1-\dfrac{\{t\}}{t}\right)=1$.

451. Поскольку $\arcsin t\sim t$ при $t\to 0$, то

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}\overset{[\frac{0}{0}]}{=}\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1-2x}{(2x-1)(2x+1)}=-\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1}{2x+1}=-\frac{1}{2}.$$

452. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{x+1}\overset{[1^\infty]}{=}e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left((x+1)\ln\frac{2x+3}{2x-1}\right)}\overset{[\infty\cdot 0]}{=}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)\ln\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)}=$$

(используем соотношение $\ln(1+t)\sim t$ при $t\to 0$)

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left((x+1)\cdot\frac{4}{2x-1}\right)}=e^2.$$

453. Используем соотношение $\ln(1+t)\sim t$ при $t\to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x^2+x+1}{x+1}\right)}{x^2}\overset{[\frac{0}{0}]}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{x^2}{x+1}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{x+1}}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}=1.$$

454. Так как $2+\lg x\sim\lg x$, $2+\lg(x+1)\sim\lg(x+1)$ при $x\to+\infty$, то

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\lg x}{2+\lg(x+1)}\overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\lg x}{\lg(x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\lg x}{\lg(x(1+\frac{1}{x}))}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\lg x}{\lg x+\lg(1+\frac{1}{x})}=1,$$

поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\lg x+\lg(1+\frac{1}{x})}{\lg x}=1+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\lg(1+\frac{1}{x})}{\lg x}=1.$

455. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{13x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{-2\sin\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{-2\cdot\frac{x}{2}}=-1.$

456. Имеем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 2x\cdot\sin 5x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot(2x)\cdot(5x)}{x^2}=20.$

457. Имеем

$$\lim_{x\to 1}\left((1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right)\overset{[0\cdot\infty]}{=}\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}\overset{[\frac{0}{0}]}{=}\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)}=$$

(по соотношению эквивалентности $\operatorname{tg} t\sim t$ при $t\to 0$)

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\frac{\pi}{2}(1-x)}=\frac{2}{\pi}.$$

458. Имеем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{th}(x^3-5x)}{2x^3+7x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh}(x^3-5x)}{\operatorname{ch}(x^3-5x)(2x^3+7x^2)}=$
(так как $\operatorname{ch}(x^3-5x)\to 1$ при $x\to 0$)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}(x^3-5x)}{2x^3+7x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-5x}{2x^3+7x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x^2-5)}{x(2x^2+7x)}=\infty.$$

459. Имеем $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\left(\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right)\overset{[\infty\cdot 0]}{=}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right)=$$

(так как $\dfrac{\pi}{2} - \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \to 0$, то применим соотношение $t \sim \sin t$, где $t = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Тогда можно воспользоваться известным соотношением $\cos(\arcsin\alpha) = \sqrt{1-\alpha^2}$)

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\cos\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+1}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1.$$

460. Положим $t = x^2$, тогда

$$\lim_{x\to0}(1+x^2)^{\frac{1}{\sin(x^2)}} \overset{[1^\infty]}{=} \lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{\sin t}} = e^{\lim\limits_{t\to0} t\cdot\frac{1}{\sin t}} = e.$$

461. Имеем: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x \overset{[1^\infty]}{=} \left|t = \dfrac{1}{x}\right| =$

$$= \lim_{t\to0}(\sin t+\cos t)^{\frac{1}{t}} = e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin t+\cos t-1}{t}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin t}{t}+\lim\limits_{t\to0}\frac{\cos t-1}{t}} = e^{1-\lim\limits_{t\to0}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{t}} = e^{1-\lim\limits_{t\to0}\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\cdot\sin\frac{t}{2}\right)}$$

$= e$.

462. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{1+x}{1+\sqrt{x}}} \overset{[1^\infty]}{=} e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}-1\right)\frac{1+x}{1+\sqrt{x}}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-(1+x)}{(x+2)(1+\sqrt{x})}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\left(\frac{1}{x}+1\right)}{\left(1+\frac{2}{x}\right)(1+\sqrt{x})}} = e^0 = 1.$$

463. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2} \overset{[1^\infty]}{=} e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}-1\right)x^2} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2-2}} = e^3.$

464. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+2}\right)^{x-1} \overset{[1^\infty]}{=} e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+2}-1\right)(x-1)} =$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-1)(x-1)}{x^2-x+2}} = e^2.$$

465. $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$. Заменой $t=\dfrac{1}{x}$ данный предел сводится к разобранному в примере.

466. Функция $\sqrt{\sin x}$ определена при $\sin x\geq 0$, является периодической с периодом 2π. Если взять последовательность значений аргумента $x'_n=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{N}$, то $\sqrt{\sin x'_n}=1\to 1$, в то время как при $x''_n=\pi n$ имеем $\sqrt{\sin x''_n}=0\to 0$, что противоречит определению предела по Гейне.

467. Тангенс – периодическая функция и поэтому каждое своё значение принимает бесконечное число раз. Выберем, например, последовательность $x=\pi n$, $n\in\mathbb{N}$, стремящуюся к $+\infty$, тогда $\lim\limits_{n\to+\infty}\operatorname{tg}\pi n=0$. С другой стороны, если взять $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{N}$, то $\lim\limits_{n\to+\infty}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\pi n\right)=1$, что противоречит единственности предела.

468. Заменой $t=\dfrac{3}{\sqrt{2}-x}$ задача сводится к предыдущей.

469. Предел не существует, так как функция $\arcsin x$ не определена в левой окрестности точки $x=-1$. Но, например, $\lim\limits_{x\to -1+0}\arcsin x$ существует и равен $-\dfrac{\pi}{2}$.

470. Предел не существует, поскольку односторонние пределы не равны: $\lim\limits_{x\to n-0}[x]=n-1$, в то время как $\lim\limits_{x\to n+0}[x]=n$.

471. Предел не существует, поскольку $\lim\limits_{x\to n-0}\{x\}=1$, $\lim\limits_{x\to n+0}\{x\}=0$.

472. Выберем две числовые последовательности, сходящиеся к x_0, одна из которых состоит только из рациональных чисел, другая – только из иррациональных. Тогда соответствующие последовательности значений функции будут сходиться к 1 и 0, что противоречит определению предела по Гейне (если конечный предел в точке x_0 существует, то для любой последовательности значений аргумента, сходящейся к x_0, он должен быть равен одному и тому же числу).

473. $\lim\limits_{x\to 1+0}2^{[x]}=2^1=2$, в то время как $\lim\limits_{x\to 1-0}2^{[x]}=2^0=1$. Неравенство односторонних пределов означает, что искомый предел не существует.

474. *1-й способ.* Рассмотрим две последовательности значений аргумента, стремящиеся к бесконечности. Если выбрать $x'_n = 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2+\sin(2\pi n)}{2+\sin(2\pi n+1)} = \dfrac{2}{2+\sin 1}$. Если же взять $x''_n = 2\pi n - 1$, $n \in \mathbb{N}$, то получим другое предельное значение $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2+\sin(2\pi n-1)}{2+\sin(2\pi n)} = \dfrac{2-\sin 1}{2}$, что противоречит единственности предела.

2-й способ. Под знаком предела мы видим периодическую функцию с периодом 2π, отличную от постоянной функции. Она периодически принимает все свои значения, поэтому данный предел не может существовать.

475. Имеем

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt[3]{x^3+2}}{7x+\sqrt[4]{x^4+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x^2})}-\sqrt[3]{x^3(1+\frac{2}{x^3})}}{7x+\sqrt[4]{x^4(1+\frac{1}{x^4})}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-x\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^3}}}{7x+|x|\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^4}}}. \text{ При } x\to+\infty, \text{ раскрывая мо-}$$

дуль, отсюда получим $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^3}}\right)}{x\left(7+\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^4}}\right)} = 0$, а при $x\to-\infty$, соответственно, будем иметь

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^3}}\right)}{x\left(7-\sqrt[4]{1-\frac{1}{x^4}}\right)} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3},$$

что противоречит единственности предела.

476. Вычислим оба односторонних предела в точке $x=1$. Поскольку при $x\to 1+0$ имеем $\operatorname{ctg}\pi x\to+\infty$, $\ln\dfrac{x^2}{x^2+1}<0$, то $\lim\limits_{x\to1+0}\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)^{\operatorname{ctg}\pi x} = 0$. В то же время при $x\to 1-0$ получим $\operatorname{ctg}\pi x\to-\infty$ и по-прежнему $\ln\dfrac{x^2}{x^2+1}<0$, поэтому $\lim\limits_{x\to1-0}\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)^{\operatorname{ctg}\pi x} = +\infty$. Следовательно, данный предел не

существует.

477. 1) Имеем $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}=\dfrac{1}{2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}\overset{[1^\infty]}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2+x}{1+x}\right)^{\frac{\sqrt{x}-1}{1-x}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{1+x}\right)^{x+1}\right)^{\frac{\sqrt{x}-1}{(x+1)(1-x)}}=e^0=1.$

478. Если $a>0$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{a}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=-\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=-\frac{1}{2}.$$

Если $a<0$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{-x}(\sqrt{-a}+\sqrt{-x})}{(\sqrt{-a}-\sqrt{-x})(\sqrt{-a}+\sqrt{-x})}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-a}-\sqrt{-x}}=\infty.$$

Если $a=0$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{-x}{x}=-1$.

479. Заметим, что предел можно переписать в виде $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\cdot\operatorname{arctg}x-1\cdot\operatorname{arctg}1}{x-1}$, тогда он равен производной функции $f(x)=x\cdot\operatorname{arctg}x$, вычисленной в точке $x=1$, т. е.

$$f'(x)=\left(\operatorname{arctg}x+\frac{x}{1+x^2}\right)\Big|_{x=1}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}.$$

480. Заметим, что предел можно переписать в виде

$$\lim_{x\to -3}\frac{(\lg(1+x^2)-x)-(\lg 10+3)}{x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{f(x)-f(-3)}{x+3},$$

где $f(x)=\lg(1+x^2)-x$. Тогда этот предел равен производной функции $f(x)$, вычисленной в точке $x=-3$, т. е.

$$f'(x)=\left(\frac{2x}{(1+x^2)\ln 10}-1\right)\Big|_{x=-3}=-\frac{6}{10\ln 10}-1=-\frac{3}{5\ln 10}-1.$$

11 СЕМИНАР: Приёмы и методы вычисления пределов функций (продолжение)

«У людей, усвоивших великие принципы математики, одним органом чувств больше, чем у простых смертных».

Чарльз Дарвин (1809–1882) – английский натуралист и путешественник, одним из первых обосновавший идею о том, что все виды живых организмов эволюционируют со временем и происходят от общих предков.

Домашнее задание: 481–487, 489, 490, 492–499, 501, 506, 508–511, 514, 518–524, 529, 532, 536, 538, 540.

Используя приёмы, изложенные на предыдущем семинаре, продолжаем решать разнообразные задачи на вычисление пределов функций, тренируя и развивая своё умение в этой области.

11.1 Задачи для самостоятельного решения

Используя различные приёмы, вычислить пределы:

№481. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$;

№482. [6, № 541] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$;

№483. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}$;

№484. [6, № 552] $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{x}-1)$ $(x>0)$;

№485. [6, № 553] $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x})$ $(x>0)$;

№486. [6, № 443] $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$;

№487. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-a^a}{x-a}$ $(a>0)$;

№488. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^a-a^a}{x-a}$ $(a>0)$;

№489. [6, № 542] $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$ $(a>0)$;

№490. [6, № 543] $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}$ $(a>0)$;

№491. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch}^2 3x-1}{x}$;

№492. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1-6x}}{x}$;

№493. [6, № 452] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$ $(m,n=2,3,...)$;

№494. [6, № 453] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$
$(m,n=2,3,...)$;

№495. [6, № 463] $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{3}}((x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}})$;

№496. [6, № 563] $\lim\limits_{x\to 1}((1-x)\log_x 2)$;

№497. [6, № 561(а)] $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$;

№498. [6, № 561(б)] $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$;

№499. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$ $(a>0)$;

№500. [6, № 483] $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$;

№501. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$;

№502. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(3x^3\right)-1}{\sin^6 2x}$;

№503. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(x+\frac{5\pi}{2}\right)\cdot\operatorname{arctg}x}{\arcsin(2x^2)}$;

№504. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\dfrac{\sqrt{1+\cos 2x}}{\sqrt{\pi}-\sqrt{2x}}$;

№505. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-\operatorname{tg}^2 x}{x^4}$;

№506. [6, № 478] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$;

№507. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x}{1-\cos 3x}$;

№508. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2-4x+4)}{\ln(x^{10}+5x^7+2)}$;

№509. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$;

№510. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{4x^2-1}}{x+7}$;

№511. [6, № 458] $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$.

№512. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$;

№513. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$;

№514. [6, № 460]

$$\lim_{x\to+0}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\right).$$

Указание: положить $t=1/x$;

№515. [6, № 413] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$;

№516. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-2x+1}{x^8-2x+1}$;

№517. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2^{\cos^2 x}-1}{\ln\sin x}$;

№518. $\lim\limits_{x\to 2}\left((2-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}\right)$;

№519. [6, № 563] $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\log_x 2$;

№520. [6, № 523] $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$;

№521. [6, № 519] $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$;

№522. [6, № 519.1] $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$;

№523. [6, № 556] $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0, b>0, c>0)$;

№524. [6, № 558] $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0, b>0)$;

№525. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x - x}{x^3}$;

№526. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\left(\log_2 x+\sqrt[5]{3x-1}\right)}{x}$;

№527. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3-\cos^3 x}\cdot\operatorname{arcctg}x\right)$;

№528. $\lim\limits_{x\to 1}\left((x-1)\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1}\right)$;

№529. $\lim\limits_{x\to n}([x]\cdot\sin\pi x)$ $(n\in\mathbb{N})$, где $[x]$ – целая часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превышающее x;

№530. $\lim\limits_{x\to -0}(\{x\}\cdot\sin(\sin x))$, где $\{x\}=x-[x]$ – дробная часть числа x;

№531. $\lim\limits_{x\to +0}(\operatorname{sgn}\ x\cdot\{\ln(1+x)\})$, где $\{x\}$ – дробная часть числа x;

№532. [6, № 505] $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$;

№533. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-3^{2x}}{x+\arcsin x^3}$;

№534. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\ln(e+\sin^4(2x))}{1-\ln(e+\sin^2(4x))}$;

№535. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, где $x_0\neq\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$,

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{ctg}x,\ x\in\mathbb{Q};\\ 1,\ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

№536. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1+x}}}$;

№537. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x-3}}{x(x-5)}$;

№538. [6, № 469] Найти постоянные a и b из условия

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b \right) = 0.$$

№539. Найти a и b, если известно, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{ax+b}{2x+3} \right)^x = e$.

Доказать, что:

№540. [6, № 564] $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^k}{a^x} = 0 \ \ (a > 1, k > 0)$;

№541. [6, № 565] $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log_a x}{x^k} = 0 \ \ (a > 1, k > 0)$.

11.2 Ответы и решения

481. Сделаем подстановку $t = e^x - 1$, тогда $x = \ln(t+1)$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\ln(t+1)} = 1.$$

482. Перейдём в a^x к основанию e и выделим предыдущий предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\ln a} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^{x\ln a} - 1}{x\ln a} \cdot \ln a \right) = \ln a.$$

483. В выражении $(1+x)^\alpha$ перейдём к основанию e и сведём к пределу $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^t - 1}{t} = 1$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha\ln(1+x)} - 1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^{\alpha\ln(1+x)} - 1}{\alpha\ln(1+x)} \cdot \frac{\alpha\ln(1+x)}{x} \right) = \alpha.$$

484. Имеем $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) \overset{[\infty\cdot 0]}{=} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln x.$

485. Имеем $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}) \overset{[\infty\cdot 0]}{=}$

$$= \lim_{n\to+\infty} x^{\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1}{\frac{1}{n(n+1)}} \cdot \frac{n^2}{n(n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} x^{\frac{1}{n+1}} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{x^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1}{\frac{1}{n(n+1)}} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n(n+1)} = 1\cdot\ln x\cdot 1 = \ln x.$$

486. Выполним подстановку $t = x - 8$:

$$\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{25+2t} - 5}{\sqrt[3]{8+t} - 2} = \lim_{t\to 0} \frac{5\left(\sqrt{1+\frac{2t}{25}} - 1\right)}{2\left(\sqrt[3]{1+\frac{t}{8}} - 1\right)} =$$

В силу предела $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\dfrac{1}{n}$ $(n=2,3,...)$ получаем

$$=\frac{5}{2}\cdot\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+\frac{2t}{25}}-1}{\frac{2t}{25}}\cdot\frac{\frac{2t}{25}}{\frac{t}{8}}\cdot\frac{\frac{t}{8}}{\sqrt[3]{1+\frac{t}{8}}-1}\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{25}\cdot 3=$$

$=12/5.$

487. Имеем $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-a^a}{x-a}\overset{[\frac{0}{0}]}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^a\left(a^{x-a}-1\right)}{x-a}=a^a\ln a.$

488. Имеем $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^a-a^a}{x-a}\overset{[\frac{0}{0}]}{=}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^a\left(\left(\frac{x}{a}\right)^a-1\right)}{x-a}=$

$$=\lim_{x\to a}\frac{a^{a-1}\left(\left(1+\frac{x-a}{a}\right)^a-1\right)}{\frac{x-a}{a}}=a^{a-1}\cdot a=a^a.$$

489. Имеем

$$\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}\overset{[\frac{0}{0}]}{=}\lim_{x\to a}\frac{(a^x-a^a)-(x^a-a^a)}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{a^x-a^a}{x-a}-\lim_{x\to a}\frac{x^a-a^a}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a^a\left(a^{x-a}-1\right)}{x-a}-\lim_{x\to a}\frac{a^{a-1}\left(\left(1+\frac{x-a}{a}\right)^a-1\right)}{\frac{x-a}{a}}=$$

$$=a^a\ln a-a^a=a^a\ln\frac{a}{e}.$$

490. Имеем

$$\lim_{x\to a}\frac{x^x-a^a}{x-a}\overset{[\frac{0}{0}]}{=}\lim_{x\to a}\frac{x^x-x^a}{x-a}+\lim_{x\to a}\frac{x^a-a^a}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{e^{x\ln x}-e^{a\ln x}}{x-a}+\lim_{x\to a}\frac{a^a((\frac{x}{a})^a-1)}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{e^{a\ln x}(e^{(x-a)\ln x}-1)}{(x-a)\ln x}\cdot\ln x+a^{a-1}\lim_{x\to a}\frac{(1+\frac{x-a}{a})^a-1}{\frac{x-a}{a}}=$$

$$=a^a\cdot 1\cdot\ln a+a^{a-1}\cdot a=a^a\ln a+a^a=a^a\ln(ae).$$

491. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch}^2 3x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}^2 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{3x}-e^{-3x})^2}{4x}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{6x}-2+e^{-6x}}{x}=\frac{1}{4}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{e^{6x}-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{e^{-6x}-1}{x}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{e^{6x}-1}{6x}-\lim_{x\to 0}\frac{e^{-6x}-1}{-6x}\right)=0$$

(использовано основное гиперболическое тождество, затем определение гиперболического синуса, после чего предел сведён к разности двух равных между собой пределов).

492. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1-6x}}{x}\overset{[\frac{0}{0}]}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+2x}-1)-(\sqrt[3]{1-6x}-1)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-6x}-1}{x}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-1}{2x}+6\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-6x}-1}{-6x}=2\cdot\frac{1}{2}+6\cdot\frac{1}{3}=3.$$

493. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[m]{1+\alpha x}-1)-(\sqrt[n]{1+\beta x}-1)}{x}\overset{[\frac{0}{0}]}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{\alpha x}\cdot\alpha-\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{\beta x}\cdot\beta=\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}.$$

494. Перепишем предел в виде

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[m]{1+\alpha x}-1)\sqrt[n]{1+\beta x}+\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}\overset{[\frac{0}{0}]}{=}$$

и разобьём на два предела:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}\right)+\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}=$$

$$= \frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n}.$$

495. Имеем

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\right) \overset{[\infty\cdot 0]}{=}$$

$$= \left|t = \frac{1}{x}\right| = \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^{\frac{2}{3}} - (1-t)^{\frac{2}{3}}}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^{\frac{2}{3}} - 1}{t} - \lim_{t\to 0} \frac{(1-t)^{\frac{2}{3}} - 1}{t} = \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

496. Имеем

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\log_x 2 \overset{[0\cdot\infty]}{=} \lim_{x\to 1}(1-x)\frac{\ln 2}{\ln x} =$$

$$= -\ln 2 \cdot \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln(1+(x-1))} = -\ln 2.$$

497. Имеем

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\ln(1+3^x)}{3^x} \cdot \frac{3^x}{2^x} \cdot \frac{2^x}{\ln(1+2^x)}\right) =$$

$$= 1 \cdot \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot 1 = 0.$$

498. Воспользуемся соотношениями эквивалентности $\ln(1+3^x) \sim \ln(3^x)$, $\ln(1+2^x) \sim \ln(2^x)$ (т. е. единицей можно пренебречь по сравнению с бесконечно большими 3^x и 2^x). Докажем, например, первое из соотношений, для этого достаточно доказать, что равен единице следующий предел:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(3^x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(3^x(1+\frac{1}{3^x}))}{\ln(3^x)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(3^x) + \ln(1+\frac{1}{3^x})}{\ln(3^x)} == \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{3^x}\right)}{\ln(3^x)}\right) = 1.$$

Тогда имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}\overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3^x)}{\ln(2^x)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln 3}{x\ln 2}=\frac{\ln 3}{\ln 2}=\log_2 3.$$

499. *1-й способ.* Имеем

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}\overset{[\frac{0}{0}]}{=}\lim_{x\to a}\frac{\ln(1+(\frac{x}{a}-1))}{a(\frac{x}{a}-1)}=\frac{1}{a}.$$

2-й способ. Для функции $f(x)=\ln x$ по определению производной в точке $x=a$ имеем: $f'(x)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$. С другой стороны, $f'(a)=\dfrac{1}{x}\Big|_{x=a}=\dfrac{1}{a}$.

500. Имеем

$$\lim_{x\to a}\frac{-2\sin\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}\overset{[\frac{0}{0}]}{=}\lim_{x\to a}\left(-\sin\frac{x+a}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\right)=-\sin a.$$

501. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}\overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^x\left(1+e^{-x}\right)\right)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\ln\left(1+e^{-x}\right)}{x}=1+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+e^{-x}\right)}{x}=$$

$$=1+\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{x}=1.$$

502. Имеем

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos\left(3x^3\right)-1}{\sin^6 2x}\overset{[\frac{0}{0}]}{=}\lim_{x\to0}\frac{-2\sin^2\left(\frac{3x^3}{2}\right)}{\sin^6 2x}=-2\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{3x^3}{2}\right)^2}{(2x)^6}=-\frac{9}{128}.$$

503. Имеем $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\sin x\cdot\operatorname{arctg}x}{\arcsin(2x^2)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x\cdot x}{2x^2}=-\dfrac{1}{2}$.

504. Последовательно упрощая, получим

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{\sqrt{2\cos^2 x}}{\sqrt{2}(\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\sqrt{x})}\overset{[\frac{0}{0}]}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{|\cos x|}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\sqrt{x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{-\cos x}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\sqrt{x}-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\left(\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\frac{\pi}{2}-x}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\sqrt{x}-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\right)=$$

$$-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{\pi}{2}})(\sqrt{x}+\sqrt{\frac{\pi}{2}})}{\sqrt{x}-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}(\sqrt{x}+\sqrt{\frac{\pi}{2}})=-\sqrt{2\pi}.$$

505. Имеем $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x-\operatorname{tg}^2 x}{x^4}\overset{[\frac{0}{0}]}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x(1-\frac{1}{\cos^2 x})}{x^4}=$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x(\cos^2 x-1)}{\cos^2 x\cdot x^4}=-\lim_{x\to0}\frac{\sin^4 x}{x^4}=-1.$$

506. Имеем $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}\overset{[\frac{0}{0}]}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+(1-\cos x)}{\sin px+(1-\cos px)}=$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{px}{2}\cos\frac{px}{2}+2\sin^2\frac{px}{2}}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{px}{2}\left(\cos\frac{px}{2}+\sin\frac{px}{2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\frac{x}{2}}{\frac{px}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{px}{2}+\sin\frac{px}{2}}\right)=\frac{1}{p}.$$

507. Поскольку $1-\cos x\cos 2x=1-\dfrac{1}{2}\cos x-\dfrac{1}{2}\cos 3x=$

$$\frac{(1-\cos x)+(1-\cos 3x)}{2}=\sin^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{3x}{2},\ \text{то}$$

$$\frac{1-\cos x\cos 2x}{1-\cos 3x}=\frac{\sin^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{3x}{2}}{2\sin^2\frac{3x}{2}}=\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{3x}{2}}+\frac{1}{2},$$

где $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{3x}{2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\frac{x}{2})^2}{(\frac{3x}{2})^2}=\dfrac{1}{9}$. Тогда $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x}{1-\cos 3x}=\dfrac{5}{9}$.

508. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2-4x+4)}{\ln(x^{10}+5x^7+2)}\overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)\right)}{\ln\left(x^{10}\left(1+\frac{5}{x^3}+\frac{2}{x^{10}}\right)\right)}=$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x + \ln\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right)}{10\ln x + \ln\left(1 + \frac{5}{x^3} + \frac{2}{x^{10}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2 + \frac{\ln\left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{\ln x}}{10 + \frac{\ln\left(1+\frac{5}{x^3}+\frac{2}{x^{10}}\right)}{\ln x}} =$$

$$= \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

509. Имеем $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^2-1}\right) \overset{[\infty-\infty]}{=} \lim\limits_{x\to1} \dfrac{(x+1)-2}{(x-1)(x+1)} =$

$$= \lim_{x\to1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

510. Имеем

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{4x^2-1}}{x+7} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} - |x|\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}}{x+7} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} + x\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}}{x(1+\frac{7}{x})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} + \sqrt{4-\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{7}{x}} = 3.$$

511. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}) \overset{[\infty-\infty]}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}}+1} = \frac{1}{2}.$$

512. Имеем $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}\right) \overset{[\infty-\infty]}{=}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1})(\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1})}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - \sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = -1.$$

513. Имеем $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}) \overset{[\infty-\infty]}{=}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1})}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = 1.$$

514. Положим $t = 1/x$, тогда

$$\lim_{t\to+\infty} \left(\sqrt{t+\sqrt{t+\sqrt{t}}}-\sqrt{t-\sqrt{t+\sqrt{t}}}\right) \overset{[\infty-\infty]}{=}$$

(домножаем и делим на сопряжённое выражение)

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{2\sqrt{t+\sqrt{t}}}{\sqrt{t+\sqrt{t+\sqrt{t}}}+\sqrt{t-\sqrt{t+\sqrt{t}}}} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{2\sqrt{t}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{t}}}}{\sqrt{t}\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{t+\sqrt{t}}}{t}}+\sqrt{1-\frac{\sqrt{t+\sqrt{t}}}{t}}\right)} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{2\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{t}}}}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{t+\sqrt{t}}}{t}}+\sqrt{1-\frac{\sqrt{t+\sqrt{t}}}{t}}} = 1.$$

515. Имеем неопределённость $\frac{0}{0}$. Чтобы раскрыть её (вычислить предел), применим бином Ньютона и получим

$$\lim_{x\to0} \frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5} =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{(1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5)-(1+5x)}{x^2+x^5} =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{x^2(10+10x+5x^2+x^3)}{x^2(1+x^3)} = 10.$$

В момент сокращения дроби на x^2 (при $x \to 0$ выражение x^2 стремится к 0, но не равно 0, поэтому сократить можно) неопределённость исчезла, и после этого предел легко вычисляется.

516. Имеем

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^4-x)-(x-1)}{(x^8-x)-(x-1)} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 1}\frac{x(x^3-1)-(x-1)}{x(x^7-1)-(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)(x^2+x+1)-(x-1)}{x(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)-(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x(x^2+x+1)-1)}{(x-1)(x(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2+x-1}{x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x-1} = \frac{1}{3}.$$

517. Положим $t = x - \dfrac{\pi}{2}$, тогда $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2^{\cos^2 x}-1}{\ln\sin x} =$

$$\overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{t\to 0}\frac{2^{\sin^2 t}-1}{\ln\cos t} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{2^{\sin^2 t}-1}{\sin^2 t}\cdot\frac{4\sin^2\frac{t}{2}\cos^2\frac{t}{2}}{\ln\left(1-2\sin^2\frac{t}{2}\right)}\right) =$$

$$= -2\ln 2\cdot\lim_{t\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{t}{2}}{\ln(1-2\sin^2\frac{t}{2})} = -2\ln 2 = \ln\frac{1}{4}.$$

518. Положим $t = x - 2$, тогда $\lim\limits_{x\to 2}\left((2-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}\right) \overset{[0\cdot\infty]}{=}$

$$= \lim_{t\to 0}\left(t\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi(t+2)}{4}\right) = \lim_{t\to 0}\left(t\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi t}{4}\right) = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{tg}\frac{\pi t}{4}} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\pi t}{4}} = \frac{4}{\pi}.$$

519. Имеем $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\log_x 2 = \lim\limits_{x\to 1}\left((1-x)\cdot\dfrac{\ln 2}{\ln x}\right) =$

$$= -\ln 2\cdot\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln(1+(x-1))} = -\ln 2.$$

520. Имеем $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x} \overset{[1^\infty]}{=} e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x-1)\operatorname{tg} x} =$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2\cdot\sin x}{\cos x}} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}} = e^0 = 1.$$

521. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} \overset{[1^\infty]}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}-1\right)\frac{1}{\sin x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{1}{\sin x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x(1-\cos x)}{(1+\sin x)\sin x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x(1+\sin x)}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)} = e^0 = 1.$$

522. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}} \overset{[1^\infty]}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}-1\right)\frac{1}{\sin^3 x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{(1+\sin x)\sin^3 x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{(1+\sin x)\sin^3 x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x(1+\sin x)\sin^2 x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x(1+\sin x)\sin^2 x}} =$$

(так как $\cos x(1+\sin x)\to 1$)

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(\frac{x}{2})^2}{x^2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

523. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}} \overset{[1^\infty]}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}-1\right)\cdot\frac{1}{x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(a^x-1)+(b^x-1)+(c^x-1)}{3x}} =$$

$$= e^{\frac{1}{3}\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{b^x-1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{c^x-1}{x}\right)} =$$

$$= e^{\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)} = e^{\frac{1}{3}\ln abc} = e^{\ln\sqrt[3]{abc}} = \sqrt[3]{abc}.$$

524. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}} \overset{[1^\infty]}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}-1\right)\cdot\frac{1}{x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{a^x+b^x}\left(\frac{a^{x^2}-1}{x^2}\cdot x+\frac{b^{x^2}-1}{x^2}\cdot x-\frac{a^x-1}{x}-\frac{b^x-1}{x}\right)} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)} = e^{\ln(ab)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

525. Имеем $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x-x}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x^3} - \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2} = 0$ (первый из пределов равен нулю, так как $|\sin x|\le 1$, а $\dfrac{1}{x^3}\to 0$ при $x\to+\infty$).

526. Предел равен 0, поскольку $|\sin(\log_2 x+\sqrt[5]{3x-1})|\le 1$, $\dfrac{1}{x}\to 0$ при $x\to+\infty$.

527. Предел равен 0, поскольку $\sqrt{2}\le\sqrt{3-\cos^3 x}\le 2$, $\operatorname{arcctg} x\to 0$ при $x\to+\infty$.

528. Предел равен 0, поскольку $\left|\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1}\right| < \dfrac{\pi}{2}$, а $x-1\to 0$ при $x\to 1$.

529. Предел равен 0, поскольку $\lim\limits_{x\to n-0}[x] = n-1$, $\lim\limits_{x\to n+0}[x] = n$, поэтому $|[x]|\le\max\{|n|,|n-1|\}$ – ограниченная в окрестности точки $x=n$ функция, а $\sin\pi x$ – бесконечно малая при $x\to n$ функция.

530. Предел равен 0, поскольку $0\le\{x\}<1$ ($\lim\limits_{x\to-0}\{x\}=1$), а функция $\sin(\sin x)$ – бесконечно малая при $x\to-0$.

531. Предел равен 0, поскольку $|\operatorname{sgn} x|\le 1$, $\{\ln(1+x)\}\to 0$ при $x\to+0$.

532. Имеем $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cdot\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)=0,$

так как $\left|\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right| \le 1$, а $\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2} =$

$= \sin\dfrac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} \to 0$ при $x \to +\infty$.

533. Имеем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-3^{2x}}{x+\arcsin x^3} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(2^{3x}-1\right)-\left(3^{2x}-1\right)}{x\left(1+\frac{\arcsin x^3}{x}\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+\frac{\arcsin x^3}{x}}\cdot\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-1}{x}\right) =$

$= 3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-1}{3x} - 2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-1}{2x} = 3\ln 2 - 2\ln 3 = \ln\dfrac{8}{9}$.

534. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\ln\left(e\left(1+\frac{\sin^4(2x)}{e}\right)\right)}{1-\ln\left(e\left(1+\frac{\sin^2(4x)}{e}\right)\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\ln\left(1+\frac{\sin^4(2x)}{e}\right)}{-\ln\left(1+\frac{\sin^2(4x)}{e}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin^4(2x)}{e}}{\frac{\sin^2(4x)}{e}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^4(2x)}{\sin^2(4x)} = \lim_{x\to 0}\frac{(2x)^4}{(4x)^2} = 0.$$

535. Возьмём две последовательности: $x'_n \to x_0$ при $n \to +\infty$, $x'_n \ne x_0$, $x'_n \in \mathbb{Q}$, и $x''_n \to x_0$, $x''_n \ne x_0$, $x''_n \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Тогда $f(x'_n) = \operatorname{ctg} x'_n \to \operatorname{ctg} x_0$, но $f(x''_n) = 1 \to 1 \ne \operatorname{ctg} x_0$, что противоречит определению предела по Гейне.

536. $\lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1+x}}} = 1 \ne 0 = \lim\limits_{x\to -1-0}\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1+x}}}$.

537. Вычислив односторонние пределы

$$\lim_{x\to 3\pm 0}\frac{\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{x-3}}{x(x-5)} = \frac{\operatorname{tg} 3\cdot(\pm\frac{\pi}{2})}{-6},$$

убеждаемся, что они не равны. Следовательно, данный предел не существует.

538. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-(ax+b)(x+1)}{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x-b+1}{x+1} = 0$$

тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} 1-a=0, \\ a+b=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1, \\ b=-1. \end{cases}$$

539. $a=2,\ b=5$. Заметим, что основание показательно-степенной функции стремится к числу $\frac{a}{2}$. Если $a<0$, то начиная с некоторого x основание становится отрицательным и функция не определена. При $a>0$, $a\neq 2$ основание степени не стремится к 1, и предел равен 0 или ∞, что противоречит условию, значит, $a=2$. Тогда имеем неопределённость 1^{∞}, раскроем её:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+b}{2x+3}\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+b}{2x+3}-1\right)x} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{(b-3)x}{2x+3}\right)}.$$

По условию этот предел равен e. Приравнивая, получаем: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(b-3)x}{2x+3}=1$, что верно лишь при $b=5$.

540. Пусть $[x]=n$, тогда $n\leq x<n+1$ и, значит, $n^k\leq x^k<(n+1)^k$, $a^n\leq a^x<a^{n+1}$, $\dfrac{1}{a^{n+1}}<\dfrac{1}{a^x}\leq\dfrac{1}{a^n}$. Следовательно, для $\forall\varepsilon>0\quad\exists N(\varepsilon):\ \forall n>N$ имеем

$$0<\frac{n^k}{a^{n+1}}<\frac{x^k}{a^x}<\frac{(n+1)^k}{a^n}<\varepsilon$$

(здесь использовался аналогичный предел для последовательностей $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(n+1)^k}{a^n}=0,\ a>1,k>0$).

541. Положим $x^k=t$, тогда $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a x}{x^k}=\dfrac{1}{k}\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\log_a t}{t}$. Воспользуемся аналогичным пределом для числовых последовательностей: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\log_a n}{n}=0\ (a>1)$, но тогда и $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\log_a(n+1)}{n}=0$, что по определению предела означает, что для произвольного $\varepsilon>0\quad\exists N(\varepsilon):\ \forall n>N$ имеем $0<\dfrac{\log_a(n+1)}{n}<\varepsilon$. Для $t>N+1$ положим $n=[t]$ (целая

часть), тогда $n > N$ и $n \le t < n+1$, так что

$$0 < \frac{\log_a t}{t} < \frac{\log_a (n+1)}{n} < \varepsilon,$$

т. е. $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\log_a t}{t} = 0$, а тем самым $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\log_a x}{x^k} = 0$.

12 СЕМИНАР: «О»–символика: о–малое, О–большое. Порядки малости и роста

«Я люблю математику не только потому, что она находит применение в технике, но и потому, что она красива».

Роза Петер (1905—1977) – венгерский математик, известна своими работами по теории рекурсивных функций.

Домашнее задание: 542, 544–558.

12.1 Асимптотическое поведение функций

Исчисление бесконечно малых – термин, ранее объединявший различные разделы математического анализа, связанные с понятием бесконечно малой функции. Хотя «метод бесконечно малых» с успехом применялся ещё учёными древней Греции и средневековой Европы для решения задач геометрии и естествознания, точные определения основных понятий теории бесконечно малых функций сложились только в XIX веке.

Чтобы понять, что такое асимптотическое поведение функции, рассмотрим пример. Пусть $\pi(x)$ – количество простых чисел, не превосходящих данного действительного числа x. Зададимся вопросом: как ведёт себя эта функция при $x \to +\infty$? Или, иными словами, каков асимптотический закон распределения простых чисел? От Евклида нам известно, что $\pi(x) \to +\infty$, но доказать, что $\pi(x)$ растёт примерно как $\dfrac{x}{\ln x}$, удалось только в XIX веке П.Л. Чебышёву.

Когда возникает вопрос об описании поведения функции вблизи некоторой точки (в том числе бесконечно удалённой), в которой, как правило, сама функция не определена, говорят, что интересуются *асимпто́тикой*, или *асимптоти́ческим поведением*, функции в окрестности этой точки. Асимптотическое поведение функции обычно характеризуют, сравнивая его с поведением другой – более простой или просто более изученной – функции (часто степенно́го вида), которая в окрестности

исследуемой точки мало отличается от изучаемой функции.

Пример 137. Функция $y = \dfrac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$ (т. е. в достаточно малой окрестности точки 0) асимптотически близка к постоянной функции, равной 1, поскольку $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. $\square$

Пример 138. Функция $y = x^2 + x + \sin\dfrac{1}{x}$ при $x \to +\infty$ ведёт себя примерно как функция x^2 (членами x и $\sin\dfrac{1}{x}$ можно пренебречь по сравнению с x^2), но при $x \to 0$ она ведёт себя как функция $\sin\dfrac{1}{x}$. $\square$

12.2 Бесконечно малые и бесконечно большие в точке функции: обозначения и свойства

Дадим точные определения некоторых элементарных понятий, относящихся к асимптотическому поведению функций. И так как асимптотическое поведение будет рассматриваться в малой окрестности точки, в которой функция является либо бесконечно малой, либо бесконечно большой, то напомним эти определения.

Пусть на множестве действительных чисел X, имеющем предельную точку x_0, определены две действительнозначные функции действительного аргумента x: $f(x)$ и $g(x)$.

Опр. 1. Функцию $y = f(x)$ называют *бесконечно ма́лой при* $x \to x_0$ (в качестве x_0 могут выступать символы $\infty, \pm\infty$), если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$. Будем обозначать этот факт как $f(x) = o(1)$ (произносится «о–ма́лое от единицы»).

Пример 139. Функции $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $x^5 - 3x^2$ являются бесконечно малыми при $x \to 0$, а функции $\dfrac{1}{x}$, e^{-x} – бесконечно малыми при $x \to +\infty$. $\square$

Если бесконечно малая функция имеет определённый знак при $x \to x_0$ (т. е. положительна или, наоборот, отрицательна в некоторой проколотой окрестности точки x_0, то это можно записать следующим образом: $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = +0$ (соответственно,

$\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = -0$).

Опр. 2. Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой при* $x \to x_0$ (в окрестности точки x_0), если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

Пример 140. Функции $\operatorname{tg} x$, $\dfrac{1}{x - \frac{\pi}{2}}$ являются бесконечно большими при $x \to \dfrac{\pi}{2}$, а функции $x^{5/3}$, $3x^4 + 1$, $e^{|x|}$ – бесконечно большими при $x \to \infty$.

Если бесконечно большая функция $f(x)$ имеет определённый знак при $x \to x_0$, то пишут: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ или, соответственно, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

Приведём ниже основные свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций, в том числе отражающие взаимосвязи между ними.

Свойства бесконечно малых (больших) функций.

1. Сумма (разность) конечного числа бесконечно малых в некоторой точке функций есть бесконечно малая в этой точке функция.

2. Произведение конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

3. Произведение бесконечно малой функции на ограниченную есть бесконечно малая функция. Как следствие, произведение бесконечно малой функции на константу – бесконечно малая функция.

4. Если $f(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$ функция, сохраняющая знак (не обращающаяся в нуль) в некоторой окрестности точки x_0, то $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ – бесконечно большая функция.

Если функция $f(x)$ является бесконечно большой при $x \to x_0$, то в некоторой достаточно малой окрестности точки x_0 определена функция $\dfrac{1}{f(x)}$, которая является бесконечно малой при $x \to x_0$.[1]

[1] Символическую связь между бесконечно малыми и бесконечно боль-

5. Сумма (разность) ограниченной (в некоторой проколотой окрестности точки x_0) функции и бесконечно большой при $x \to x_0$ функции является бесконечно большой при $x \to x_0$ функцией.

6. (*О произведении ограниченной снизу функции на бесконечно большую*). Если функция $f(x)$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0 по абсолютной величине ограничена снизу положительным числом: $|f(x)| \geqslant M > 0$, а функция $g(x)$ является бесконечно большой при $x \to x_0$, то их произведение является бесконечно большой функцией при $x \to x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \infty.$$

7. (*О частном от деления ограниченной снизу функции на бесконечно малую*). Если функция $f(x)$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0 по абсолютной величине ограничена снизу положительным числом: $|f(x)| \geqslant M > 0$, а функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \to x_0$, и существует проколотая окрестность точки x_0, в пределах которой которой $\alpha(x) \neq 0$, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\alpha(x)} = \infty.$$

8. (*Теорема сравнения для бесконечно больших функций*). Если функция $f(x)$ является бесконечно большой при $x \to x_0$, и функция $g(x)$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0 удовлетворяют неравенству $|g(x)| \geqslant |f(x)|$, то функция $g(x)$ также бесконечно большая при $x \to x_0$.

12.3 Понятие o-малого. Порядок малости

«В конце всё обязательно должно быть хорошо.
Если что-то плохо — значит, это ещё не конец»...

Пауло Коэльо (род. 1947) –
бразильский прозаик и поэт.

шими функциями обозначают соотношениями: $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$, $\frac{1}{+0} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = +0$ и т. д.

Приведём общее определение.

Опр. 3 (общее понятие *о–ма́лого*). Говорят, что при $x \to x_0$ функция $f(x)$ (произвольная, не обязательно бесконечно малая) есть *бесконечно малая по сравнению с функцией* $g(x)$, если $f(x)$ можно представить в виде:

$$f(x) = \alpha(x) \cdot g(x),$$

где $\alpha(x)$ – функция, бесконечно малая при $x \to x_0$. Обозначение:

$$f(x) = o(g(x)).$$

Читается «$f(x)$ есть *о–ма́лое* от $g(x)$». Из определения, в частности, следует, что при $g(x) \equiv 1$ запись $f(x) = o(1)$ означает просто, что $f(x)$ есть бесконечно малая при $x \to x_0$ функция.

Пример 141. При $x \to 0$ имеем $3x^5 - 2x^2 = o(x)$, так как $3x^5 - 2x^2 = (3x^4 - 2x) \cdot x$. С другой стороны, при $x \to +\infty$ получаем, что $x = o(x^2)$, так как $x = \dfrac{1}{x} \cdot x^2$. $\square$

Опр. 4 (б. м. *более высокого* (*низкого*) *порядка ма́лости*). Если в последнем определении функция $g(x)$ сама является бесконечно малой функцией при $x \to x_0$, то говорят, что б. м. функция $f(x)$ есть *бесконечно малая более высокого порядка малости* по сравнению с б. м. функцией $g(x)$. Иными словами, по мере приближения к x_0 функция $f(x)$ стремится к нулю быстрее, чем $g(x)$. При этом функция $g(x)$ называется, соответственно, *бесконечно малой более низкого порядка малости*, чем б. м. $f(x)$.

Пример 142. Б. м. функция $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ при $x \to +\infty$ есть б. м. более высокого порядка по сравнению с б. м. функцией $g(x) = \dfrac{1}{x}$. $\square$

Таким образом, б. м. функции можно сравнивать между собой по скорости их приближения к нулю в окрестности заданной точки.

Опр. 3' (частное понятие *о–ма́лого*). В случае, когда функция $g(x)$ не обращается в нуль в некоторой (проколотой)

окрестности точки x_0, следующие понятия становятся равносильными:

$$f(x) = o(g(x)) \text{ при } x \to x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Пример 143. При $a > 1$ и любом $k \in \mathbb{R}_+$, имеем[1] $x^k = o(a^x)$, $\log_a x = o(x^k)$, так как $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^k}{a^x} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\log_a x}{x^k} = 0$. $\square$

Опр. 5 (б. м. функции *k-го порядка малости*). Если две б. м. в окрестности x_0 функции $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g^k(x)} = C, \quad \text{где } k \in \mathbb{R}_+,\ C = const,\ C \neq 0,$$

то говорят, что б. м. функция $g(x)$ имеет *k-й порядок малости* относительно б. м. $f(x)$.

Пример 144. При $x \to 0$ б. м. функция $2x^3$ имеет третий порядок малости относительно x, поскольку $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^3}{x^3} = 2$, бесконечно малая $7x^2$ – второй порядок, а б. м. $\sqrt{x}$ – порядок, равный $0,5$. $\square$

Следует отметить, что не все бесконечно малые функции можно сравнивать между собой.

Пример 145. Функции $f(x) = x \cdot \sin \dfrac{1}{x}$ и $g(x) = x$ несравнимы при $x \to 0$, так как предел их отношения $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cdot \sin \frac{1}{x}}{x}$ не существует. $\square$

Аналогично с помощью понятия «о–малого» можно сравнивать между собой бесконечно большие функции. Так, если $f(x)$ и $g(x)$ – две бесконечно большие при $x \to x_0$ функции и $f(x) = o(g(x))$, то говорят, что $g(x)$ есть *бесконечно большая более высокого порядка роста* по сравнению с $f(x)$.

Пример 146. При $x \to 0$ имеем $\dfrac{1}{x} \to \infty$, $\dfrac{1}{x^2} \to \infty$, при этом $\dfrac{1}{x} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, т. е. при $x \to 0$ функция $\dfrac{1}{x^2}$ есть б. б. более высокого порядка роста, чем $\dfrac{1}{x}$. При $x \to \infty$ функция x^2 есть бесконечно

[1] $\mathbb{R}_+$ – множество положительных действительных чисел.

большая более высокого порядка, чем x. $\square$

12.4 O–большое, O^* (О–большое со звёздочкой). Функции одного порядка малости (роста). Асимптотически эквивалентные функции.

Опр. 1 (понятие *O–бо́льшо́го*). Говорят, что при $x \to x_0$ функция $f(x)$ есть *O-большое*[1] от функции $g(x)$, если существуют функция $\alpha(x)$ и проколотая окрестность $\overset{\circ}{\mathrm{U}}(x_0)$ точки x_0 такие, что

$$f(x) = \alpha(x) \cdot g(x), \quad x \in \overset{\circ}{\mathrm{U}}(x_0) \cap X,$$

где $\alpha(x)$ – ограниченная функция, т. е. $|\alpha(x)| \leq C$. Обозначение:

$$f(x) = O(g(x)).$$

В частности, запись $f(x) = O(1)$ означает, что функция $f(x)$ ограничена в окрестности точки x_0.

Пример 147. При $x \to +\infty$ имеем $1 + x\sin x = O(x)$, так как $1 + x\sin x = \left(\dfrac{1}{x} + \sin x\right) x$, где $\left|\dfrac{1}{x} + \sin x\right| \leq 2$ $(x \geq 1)$. $\square$

Опр. 2 (функций *одного порядка малости* (*роста*)). Говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$ *одного порядка* при $x \to x_0$, и пишут $f(x) \asymp g(x)$ при $x \to x_0$, если одновременно

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{и} \quad g(x) = O(f(x)).$$

Условие, что функции $f(x)$ и $g(x)$ одного порядка при $x \to x_0$, очевидно, равносильно тому, что найдутся числа $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ такие, что в некоторой окрестности точки x_0 выполнено соотношение

$$C_1|g(x)| \leq |f(x)| \leq C_2|g(x)|$$

или, что то же самое,

$$\frac{1}{C_2}|f(x)| \leq |g(x)| \leq \frac{1}{C_1}|f(x)|.$$

[1] $O(\cdot)$ – символ Ландау.

Пример 148. Например, функции $(2+\sin x)x$ и x имеют один порядок при $x \to \infty$, поскольку $|x| \le |(2+\sin x)x| \le 3|x|$, но функции $(1+\sin x)x$ и x не являются функциями одного порядка при $x \to \infty$. $\square$

Опр. 3 (общее определение $O^*(\cdot)$). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в проколотой окрестности $\overset{\circ}{\mathrm{U}}(x_0)$, $f(x) = \alpha(x) \cdot g(x)$ при всех $x \in \overset{\circ}{\mathrm{U}}(x_0)$, причём существует $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = C \neq 0$. Тогда говорят, что при $x \to x_0$ функция $f(x)$ есть «О–большое со звёздочкой» от $g(x)$ и обозначают

$$f(x) = O^*(g(x)).$$

Пример 149. При $x \to 0$ имеем $(3+\sin x)x^2 = O^*(x^2)$, т. к.

$$\lim_{x \to 0}(3+\sin x) = 3. \ \square$$

Пример 150. При $x \to +\infty$ имеем $7x^5 - 3x + 1 = O^*(x^5)$, т. к.

$$7x^5 - 3x + 1 = x^5\left(7 - \frac{3}{x^4} + \frac{1}{x^5}\right), \text{ где } \lim_{x \to +\infty}\left(7 - \frac{3}{x^4} + \frac{1}{x^5}\right) = 7. \ \square$$

При некотором дополнительном условии данное определение можно упростить.

Опр. 3' (частное определение $O^*(\cdot)$). Если дополнительно $g(x) \neq 0$ в $\overset{\circ}{\mathrm{U}}(x_0)$, то приведённое выше определение эквивалентно существованию конечного предела $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = C \neq 0$.

Пример 151. При $x \to +\infty$ имеем $7x^5 - 3x + 1 = O^*(x^5)$, т. к.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{7x^5 - 3x + 1}{x^5} = 7. \ \square$$

Опр. 4 (общее определение эквивалентных функций). Если между функциями $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to x_0$ выполнено соотношение

$$f(x) = \gamma(x) \cdot g(x), \text{ где } \lim_{x \to x_0} \gamma(x) = 1,$$

то говорят, что при $x \to x_0$ функция $f(x)$ асимптотически ведёт себя как функция $g(x)$ или, короче, что $f(x)$ *эквивалентна* $g(x)$

при $x \to x_0$. Обозначение:

$$f(x) \sim g(x) \quad (\text{или } g(x) \sim f(x)).$$

Таким образом, эквивалентные функции являются частным случаем бесконечно малых функций одного порядка малости.

Опр. 4' (частное определение эквивалентных функций). В случае, когда функция $g(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0, следующие понятия равносильны:

$$f(x) \sim g(x) \text{ при } x \to x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Пример 152. Например, $3x^2 + x \sim 3x^2$ при $x \to \infty$, так как

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 + x}{3x^2} = 1. \square$$

Замечание 1. Поскольку соотношение $\lim\limits_{x \to x_0} \gamma(x) = 1$ равносильно тому, что $\gamma(x) = 1 + \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, то соотношение $f(x) \sim g(x)$ равносильно тому, что

$$f(x) = g(x) + \alpha(x)g(x) = g(x) + o(g(x)) \quad \text{при } x \to x_0.$$

Выше говорилось о законе распределения простых чисел. Теперь мы в состоянии записать его точную формулировку:

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + o\left(\frac{x}{\ln x}\right) \quad \text{при } x \to \infty.$$

Замечание 2. Другие известные соотношения эквивалентности при $x \to 0$:

$$\sin x \sim x, \quad \operatorname{tg} x \sim x, \quad \arcsin x \sim x, \quad \operatorname{arctg} x \sim x, \quad \operatorname{sh} x \sim x,$$

$$\ln(1+x) \sim x, \quad (1+x)^\alpha \sim 1+\alpha x, \quad a^x \sim 1+x \ln a, \quad \cos x \sim 1-\frac{x^2}{2}.$$

Тот факт, что предел отношения двух бесконечно малых (бесконечно больших) функций равен пределу отношения эквивалентных им функций, используется при вычислении пределов для раскрытия неопределённостей вида $\frac{0}{0}$ (вида $\frac{\infty}{\infty}$).

Пример 153. Вычислим предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{\sin x^2}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos^2 x)}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin^2 x)}{x^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x^2}=-\frac{1}{2}.\ \square$$

12.5 Понятие главного члена функции

«Плохой учитель преподносит истину,
хороший учит её находить».
Адольф Дистервег (1790—1866) –
немецкий педагог.

Если б. м. при $x\to x_0$ функция $f(x)$ эквивалентна б. м. функции вида $\alpha(x)=C(x-x_0)^n$, где $C=const$, $C\neq 0$, $n>0$, т. е.

$$f(x)=C(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n),$$

то назовём $\alpha(x)$ *главным членом* функции $f(x)$ при $x\to x_0$. Понятие главного члена вводится как для б. м., так и для б. б. функций. Поскольку многие функции допускают разложения в степенные ряды, главный член часто ищут в степенном виде. Так как б. м. (б. б.) в окрестности заданной точки x_0 функция эквивалентна своему главному члену, то вместо того чтобы исследовать поведение самой функции, которая может иметь достаточно сложный вид, во многих случаях можно исследовать в указанной окрестности поведение её главного члена, что, безусловно, проще.

Пример 154. Найти главный член функции–многочлена

$$y=5x^7-x^2+3x:$$

а) при $x\to+\infty$; б) при $x\to 0$.

Рассмотрим вначале «интуитивное» решение.

а) При $x\to+\infty$ эта функция является б. б. При достаточно больших x первое слагаемое намного больше остальных двух, которыми по сравнению с ним можно пренебречь. Можно сказать, что при

достаточно больших x функция ведёт себя примерно как функция $y = 5x^7$. Выражение $Cx^n = 5x^7$, где $C = 5$, $n = 7$, и будет здесь главным членом функции. Этот факт можно записать так:

$$5x^7 - x^2 + 3x = 5x^7 + o(x^7) \quad \text{или} \quad 5x^7 - x^2 + 3x \sim 5x^7$$

при $x \to +\infty$.

б) С другой стороны, та же функция $y = 5x^7 - x^2 + 3x$ при $x \to 0$ уже будет б. м. Так как при достаточно малых x слагаемые $5x^7$ и $(-x^2)$ быстрее стремятся к нулю, а значит пренебрежимо малы по сранению с $3x$, то главным членом функции будет уже $3x$. $\square$

В каком виде следует искать главный член функции обычно можно догадаться из контекста задачи и определения, а именно:

1) если функция $f(x)$ – б. м. при $x \to x_0$, то главный член имеет вид $C(x - x_0)^n$, где $n \in \mathbb{R},\ n > 0$;

2) если функция $f(x)$ – б. м. при $x \to +\infty$, то главный член имеет вид $\dfrac{C}{x^n}$, где $n \in \mathbb{R},\ n > 0$;

3) если функция $f(x)$ – б. б. при $x \to x_0$, то главный член имеет вид $\dfrac{C}{(x - x_0)^n}$ $(n \in \mathbb{R},\ n > 0)$;

4) если функция $f(x)$ – б. б. при $x \to +\infty$, то главный член имеет вид Cx^n $(n \in \mathbb{R},\ n > 0)$.

Если функция $f(x)$ определена лишь в односторонней окрестности точки x_0, то там же определён и её главный член.

Для нахождения главного члена обычно вычисляют предел отношения функции к её главному члену, записанному в общем виде (возможно, без C), и подбирают значение показателя n так, чтобы этот предел оказался в результате равен некоторой константе, отличной от нуля. Это и будет C.

Пример 155. Используя указанный выше приём, найти главный член функции $y = 5x^7 - x^2 + 3x$:

$$\text{а) при } x \to +\infty; \quad \text{б) при } x \to 0.$$

Решение. а) При $x \to +\infty$ функция является б. б., поэтому будем искать её главный член в виде б. б. функции Cx^n $(n > 0)$. Рассмот-

рим предел отношения функции к её главному члену (без константы C):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^7-x^2+3x}{x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^7(5-\frac{1}{x^5}+\frac{3}{x^6})}{x^n}\overset{n=7}{=}5.$$

Мы подобрали n так, чтобы этот предел был равен ненулевой константе. Таким образом, $C=5$ и главный член равен $5x^7$.

Ответ: при $x\to+\infty$ $f(x)=5x^7+o(x^7)$.

б) При $x\to 0$ функция уже является б. м., поэтому её главный член ищем в виде б. м. функции Cx^n $(n>0)$:

$$\lim_{x\to0}\frac{5x^7-x^2+3x}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{x(5x^6-x+3)}{x^n}\overset{n=1}{=}3.$$

Видно, что если выбрать $n=1$ (и только в этом случае, убедитесь в этом!), предел будет равен числу 3, это и есть искомая константа C.

Ответ: при $x\to 0$ $f(x)=3x+o(x)$. □

Пример 156. Найти главный член при $x\to 1$ функции

$$y=\operatorname{arctg}(1-x^2).$$

Решение. Ищем главный член этой б. м. функции в виде $C(x-1)^n$ $(n>0)$, используя соотношение эквивалентности $\operatorname{arctg} t\sim t$, $t\to 0$:

$$\lim_{x\to1}\frac{\operatorname{arctg}(1-x^2)}{(x-1)^n}=\lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{(x-1)^n}=\lim_{x\to1}\frac{-(x-1)(x+1)}{(x-1)^n}\overset{n=1}{=}-2.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}(1-x^2)\sim-2(x-1)$ при $x\to 1$. □

Пример 157. Найти главный член при $x\to\infty$ функции

$$y=\arcsin\left(\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right).$$

Решение. Ищем главный член этой б. м. функции в виде $\dfrac{C}{x^n}$ $(n>0)$, используя соотношение эквивалентности $\arcsin t\sim t$, $t\to 0$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\arcsin\left(\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{\frac{1}{x^n}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^n}}\overset{n=2}{=}3=C.$$

Ответ: $\arcsin\left(\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)\sim\dfrac{3}{x^2}$ при $x\to\infty$. □

12.6 Задачи для самостоятельного решения

Задачи на асимптотические свойства функций:[1]

№542. Доказать, что $\sqrt{x^2+x} \sim x$ при $x \to +\infty$.

№543. Доказать, что $\operatorname{arctg}^2(x^4-1) \sim 16(x-1)^2$ при $x \to 1$.

№544. [6, № 650(б,г,ж)] Пусть $x \to 0$. Доказать, что:

$$\text{а)}\ \ x \cdot \sin\sqrt{x} = O(x^{\frac{3}{2}}); \quad \text{б)}\ \ \ln x = o\left(\frac{1}{x^{\varepsilon}}\right)\ \ (\varepsilon > 0);$$

$$\text{в)}\ \ (1+x)^n = 1 + nx + o(x) \quad (n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2).$$

№545. [6, № 651(г,д)] Пусть $x \to +\infty$. Доказать, что:

$$\text{а)}\ \ \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} = O\left(\frac{1}{x^2}\right); \quad \text{б)}\ \ \ln x = o\left(x^{\varepsilon}\right)\ \ (\varepsilon > 0).$$

№546. [6, № 646(а,в,д)] Доказать, что:

$$\text{а)}\ o(o(f(x))) = o(f(x)), \quad \text{б)}\ o(O(f(x))) = o(f(x)),$$

$$\text{в)}\ O(f(x)) + o(f(x)) = O(f(x)).$$

№547. [6, № 647(а,б,в)] Пусть $x \to 0$, $n > 0$. Доказать, что:

$$\text{а)}\ \ C \cdot O(x^n) = O(x^n) \quad (C \neq 0,\ C = const),$$

$$\text{б)}\ \ O(x^n) + O(x^m) = O(x^n) \quad (n < m),$$

$$\text{в)}\ \ O(x^n) \cdot O(x^m) = O(x^{m+n}).$$

№548. [6, № 648(б)] Пусть $x \to +\infty$, $n > 0$. Доказать, что

$$O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)\ \ (n > m).$$

---

[1] Во всех задачах этого пункта для упрощения записи (как это сделано в задачнике В.П. Демидовича) будем использовать следующие обозначения:

а) Пусть $f(x)$ – б. б. (б. м.) при $x \to x_0$ функция. Тогда $o(f(x))$ – произвольная функция, имеющая при $x \to x_0$ более низкий порядок роста (соответственно, более высокий порядок малости), чем функция $f(x)$, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{o(f(x))}{f(x)} = 0$.

б) Через $O(f(x))$ будем здесь обозначать любую функцию, имеющую при $x \to x_0$ тот же порядок роста (соответственно, тот же порядок малости), что и функция $f(x)$, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{O(f(x))}{f(x)} = C \neq 0$.

Задачи на нахождение главного члена функции:[1]

№549. [6, №653(а,б,в,г)] Пусть $x \to 0$. Найти главный член вида Cx^n $(n > 0)$ следующих б. м. функций:

а) $f(x) = 2x - 3x^3 + x^5$; б) $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$;

в) $f(x) = \sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}$; г) $f(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$.

№550. [6, №656(а,б,в,г)] Пусть $x \to +\infty$. Определить вид главного члена и найти его для следующих б. б. функций:

а) $f(x) = x^2 + 100x + 10000$; б) $f(x) = \dfrac{2x^5}{x^3 - 3x + 1}$;

в) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x} + \sqrt{x}$; г) $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}$.

№551. [6, №655(в,г,д)] Пусть $x \to 1$. Найти главный член вида $C(x-1)^n$ и определить порядки малости относительно бесконечно малой $(x-1)$ следующих б. м. функций:

а) $f(x) = \ln x$; б) $f(x) = e^x - e$; в) $f(x) = x^x - 1$.

№552. Пусть $x \to +\infty$. Найти главный член и определить порядки роста относительно бесконечно большой x следующих б. б. функций:

а) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x} + \sqrt{x}$; б) $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}$.

№553. Найти главный член при $x \to -\infty$ у функции

$$f(x) = \sin \frac{2}{3x^3 - 5x + 1}.$$

№554. [6, №658(б)] Пусть $x \to 1$. Выделить главный член функции:

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

[1] Во всех задачах из данного пункта главный член предполагается степенно́го вида.

№555. [6, № 658(г)] Пусть $x \to 1$. Выделить главный член функции:

$$f(x) = \frac{1}{\sin(\pi x)}.$$

№556. Найти главный член при $x \to 0$ функции

$$f(x) = \arcsin\left(\ln \frac{2x^3 + x + 2}{x + 2}\right).$$

Разные задачи:

№557. [6, № 652(а,б,в)] Доказать, что при достаточно большом $x > 0$ имеют место неравенства:

а) $x^2 + 10x + 100 < 0,001x^3$; б) $\ln^{1000} x < \sqrt{x}$; в) $x^{10}e^x < e^{2x}$.

№558. [6, № 659] Пусть $x \to +\infty$ и $f_n(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Доказать, что: 1) каждая из функций $f_n(x)$ растёт быстрее, чем предшествующая функция $f_{n-1}(x)$; 2) функция e^x растёт быстрее, чем каждая из функций $f_n(x)$.

12.7 Ответы и решения

542. Это следует из того, что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x}=1.$$

543. По определению эквивалентных функций, достаточно доказать равенство единице следующего предела

$$\lim_{x\to1}\frac{\operatorname{arctg}^2(x^4-1)}{16(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{(x^4-1)^2}{16(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)^2}{16(x-1)^2}$$

$=1$ (здесь использовалось соотношение эквивалентности $\operatorname{arctg} t\sim t$ при $t\to0$).

544. а) Доказательство соотношения сводится к проверке равенства ненулевой константе предела

$$\lim_{x\to+0}\frac{x\cdot\sin\sqrt{x}}{x^{3/2}}=1.$$

б) Доказательство соотношения сводится к проверке равенства нулю предела

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{1/x^{\varepsilon}}.$$

Положим $t=1/x$, тогда $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{-\ln t}{t^{\varepsilon}}=0$.

в) Воспользуемся биномом Ньютона:

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+...+x^n=$$

$$=1+nx+x\left(\frac{n(n-1)}{2!}x+...+x^{n-1}\right)=1+nx+x\cdot\alpha(x),$$

где $\alpha(x)=\dfrac{n(n-1)}{2!}x+...+x^{n-1}\to0$ при $x\to0$.

545. а) Доказательство соотношения сводится к проверке равенства ненулевой константе предела

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)\cdot1/x^2}=\frac{\pi}{2}.$$

б) Доказательство соотношения сводится к проверке равенства нулю предела

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\varepsilon}}=0.$$

В следующих задачах в общем виде доказываются различные асимптотические соотношения, в основе которых лежат те или иные свойства о–малого и О–большого:

546. а) Доказательство соотношения $o(o(f(x)))=o(f(x))$ равносильно доказательству равенства нулю предела

$$\lim_{x\to a}\frac{o(o(f(x)))}{f(x)}=\lim_{x\to a}\left(\frac{o(o(f(x)))}{o(f(x))}\cdot\frac{o(f(x))}{f(x)}\right)=0\cdot 0=0;$$

б) Доказательство соотношения $o(O(f(x)))=o(f(x))$ равносильно доказательству равенства нулю предела

$$\lim_{x\to a}\frac{o(O(f(x)))}{f(x)}=\lim_{x\to a}\left(\frac{o(O(f(x)))}{O(f(x))}\cdot\frac{O(f(x))}{f(x)}\right)=0\cdot C=0;$$

в) Доказательство соотношения $O(f(x))+o(f(x))=O(f(x))$ равносильно доказательству равенства ненулевой константе предела

$$\lim_{x\to a}\frac{O(f(x))+o(f(x))}{f(x)}=\lim_{x\to a}\left(\frac{O(f(x))}{f(x)}+\frac{o(f(x))}{f(x)}\right)=C+0=C.$$

547. а) Достаточно доказать равенство ненулевой константе предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{C\cdot O(x^n)}{x^n}=C\cdot\lim_{x\to 0}\frac{O(x^n)}{x^n}=C\cdot C_1=C_2\neq 0;$$

б) Достаточно доказать равенство ненулевой константе предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{O(x^n)+O(x^m)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{O(x^n)}{x^n}+\frac{O(x^m)}{x^m}\cdot\frac{x^m}{x^n}\right)=$$

$$=C_1+C_2\cdot 0=C_1\neq 0;$$

в) Достаточно доказать равенство ненулевой константе предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{O(x^n)\cdot O(x^m)}{x^{m+n}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{O(x^n)}{x^n}\cdot\frac{O(x^m)}{x^m}\right)=C_1\cdot C_2\neq 0.$$

548. Достаточно доказать равенство ненулевой константе предела

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{O(x^n)+O(x^m)}{x^n}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{O(x^n)}{x^n}+\frac{O(x^m)}{x^m}\cdot\frac{x^m}{x^n}\right)=$$

$$=C_1+C_2\cdot 0=C_1\neq 0.$$

549. Имеем: а) *1-й способ.* Рассмотрим предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-3x^3+x^5}{x^n}$$

и подберём n так, чтобы данный предел был равен ненулевой константе. Очевидно, при $n=1$ предел равен 2. Поэтому главный член имеет вид $2x$, и можно записать

$$2x-3x^3+x^5=2x+o(x).$$

2-й способ. Так как $2x-3x^3+x^5=2x+x(x^4-3x)=2x+x\cdot\alpha(x)$, где $\alpha(x)=x^4-3x\to 0$ при $x\to 0$, то $2x-3x^3+x^5=2x+o(x)$, т. е. $Cx^n=2x$.

б) Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)-(\sqrt{1-x}-1)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}-\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)}{x(\sqrt{1-x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)}-\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x(\sqrt{1-x}+1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,$$

то $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=x+o(x)$, т. е. $Cx^n=x$.

в) *1-й способ.* Вычислим предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-2x}-(1-x))-(\sqrt[3]{1-3x}-(1-x))}{x^2}=$$

Сделав в первом пределе подстановку $t=\sqrt{1-2x}$ (а во втором, соответственно, подстановку $t=\sqrt[3]{1-3x}$), получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x}-(1-x)}{x^2}=\lim_{t\to 1}\frac{t-1+\frac{1-t^2}{2}}{(\frac{1-t^2}{2})^2}=-\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-3x}-(1-x)}{x^2}=\lim_{t\to 1}\frac{t-1+\frac{1-t^3}{3}}{(\frac{1-t^3}{3})^2}=1,$$

поэтому исходный предел равен $\frac{1}{2}$, а значит главный член равен $Cx^n=\frac{1}{2}x^2$.

2-й способ. Перепишем предел в виде

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[6]{(1-2x)^3}-\sqrt[6]{(1-3x)^2}}{x^2},$$

положим $A=\sqrt[6]{(1-2x)^3}$, $B=\sqrt[6]{(1-3x)^2}$ и умножим и разделим на сопряжённое выражение

$$A^6-B^6=(A-B)(A^5+A^4B+A^3B^2+A^2B^3+AB^4+B^5).$$

г) Поскольку $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{2}$ (см. [6, № 475]), то главный член имеет вид $Cx^n=\dfrac{1}{2}x^3$, т. е. $\operatorname{tg}x-\sin x=\dfrac{1}{2}x^3+o(x^3)$.

550. Так как данные функции являются (положительными) бесконечно большими при $x\to+\infty$, то будем искать главный член, исходя из соображений, что он также должен быть б. б. функцией при $x\to+\infty$ и иметь степенной вид. Таким образом, ищем главный член в виде Cx^n, где $n>0$.

а) Рассмотрим предел

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+100x+10000}{x^n}$$

и подберём n так, чтобы данный предел был равен ненулевой константе. Очевидно, при $n = 2$ предел равен 1. Поэтому главный член имеет вид x^2, и можно записать $x^2 + 100x + 10000 = x^2 + o(x^2)$.

б) *1-й способ.* Выпишем предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x^5}{x^3-3x+1}}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^5}{(x^3-3x+1)x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{(1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3})x^n}$$

и, вычисляя его, подберём n так, чтобы предел был равен какой-либо ненулевой константе. Поскольку при $n = 2$ предел равен 2, то главный член имеет вид $2x^2$, и можно записать $\dfrac{2x^5}{x^3-3x+1} = 2x^2 + o(x^2)$.

2-й способ. Поделив «уголком» (или используя другие приёмы), выделим целую часть у этой дробно-рациональной функции: $\dfrac{2x^5}{x^3-3x+1} = 2x^2+6-2\cdot\dfrac{x^2-9x+3}{x^3-3x+1}$. Так как оставшаяся дробь стремится к нулю, то отсюда видно, что главный член имеет вид $2x^2$, и приходим к ответу $\dfrac{2x^5}{x^3-3x+1} = 2x^2 + o(x^2)$.

в) Так как

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2(1-\frac{1}{x})}+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}+\frac{1}{\sqrt[6]{x}}\right) = 1,$$

то $Cx^n = x^{\frac{2}{3}}$.

г) Поскольку

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}+1}+1} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}+1} =$$

$$= \sqrt{\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1} = \sqrt{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)} =$$

$$= \sqrt[8]{x}\cdot\sqrt{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}}, \quad \text{то } Cx^n = x^{\frac{1}{8}}.$$

551. Имеем

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{(x-1)^n}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+(x-1))}{(x-1)^n}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(x-1)^n}=1$

при $n=1$. Следовательно, $C=1$, и главный член функции равен $(x-1)$. Функция $\ln x$ имеет в малой окрестности точки $x=1$ тот же порядок малости, что и $(x-1)$, более того, они эквивалентны.

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{(x-1)^n}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e(e^{x-1}-1)}{(x-1)^n}=e$ при $n=1$. Значит, $C=e$, и главный член функции равен $e(x-1)$. Функция e^x-e имеет в малой окрестности точки $x=1$ тот же порядок малости, что и $(x-1)$.

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{(x-1)^n}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}\cdot\dfrac{x\ln x}{(x-1)^n}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{(x-1)^n}$

$=1$ при $n=1$. Таким образом, главный член равен $(x-1)$. Функция x^x-1 имеет в малой окрестности точки $x=1$ тот же порядок малости, что и $(x-1)$, более того, они эквивалентны.

552. Поскольку функция является б. б. при $x\to+\infty$, то её главный член ищем в виде Cx^n $(n>0)$.

а) Рассмотрим предел

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}}{x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{2}{3}}(\sqrt[3]{1-x^{-1}}+x^{-\frac{1}{6}})}{x^n}=1$$

при $n=\frac{2}{3}$. Следовательно, $C=1$, и главный член функции равен $x^{\frac{2}{3}}$. Порядок роста по сравнению с б. б. x равен $\frac{2}{3}$.

Ответ: $\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}=x^{\frac{2}{3}}+o(x^{\frac{2}{3}})$.

б) Составим предел отношения

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}}{x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{8}}\sqrt{x^{-4}+\sqrt{x^{-1}+1}}}{x^n}=1$$

при $n=\frac{1}{8}$. Значит, $C=1$, и главный член равен $x^{\frac{1}{8}}$ (порядок роста по сравнению с б. б. x равен $\frac{1}{8}$).

553. Ищем главный член в виде $C\left(\frac{1}{x}\right)^n$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin\frac{2}{3x^3-5x+1}}{\left(\frac{1}{x}\right)^n}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sin\frac{2}{3x^3-5x+1}}{\frac{2}{3x^3-5x+1}}\cdot\frac{\frac{2}{3x^3-5x+1}}{\left(\frac{1}{x}\right)^n}\right)=\frac{2}{3}$$

при $n=3$. Поэтому главный член равен $\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{x}\right)^3$.

554. Найдём область определения б. б. функции: $\dfrac{1+x}{1-x}\geq 0$, т. е. $x\in[-1,1)$, тогда главный член ищем в виде $C\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^n$:

$$\lim_{x\to1-0}\frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{\left(\frac{1}{1-x}\right)^n}=\sqrt{2}\cdot\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x}}}{\left(\frac{1}{1-x}\right)^n}=\sqrt{2}$$

при $n=\frac{1}{2}$. Следовательно, $C=\sqrt{2}$, и главный член функции равен

$$\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

555. Функция является бесконечно большой, поэтому

$$\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{\sin(\pi x)}}{\left(\frac{1}{x-1}\right)^n}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^n}{\sin(\pi-\pi x))}=-\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^n}{\sin(\pi(x-1))}=$$

$$=-\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^n}{\pi(x-1)}=-\frac{1}{\pi}\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^n}{(x-1)}=-\frac{1}{\pi}$$

при $n=1$. Значит, $C=-1/\pi$, и главный член функции равен

$$-\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{x-1}\right).$$

556. При $x\to0$ будем искать главный член этой б. м. функции в виде Cx^n. Рассмотрим предел

$$\lim_{x\to0}\frac{\arcsin\left(\ln\frac{2x^3+x+2}{x+2}\right)}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\frac{2x^3+x+2}{x+2}}{x^n}=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{2x^3}{x+2}\right)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x^3}{x+2}}{x^n} = 1$$

при $n = 3$. Итак, $f(x) = x^3 + o(x^3)$.

557. а) Утверждение следует из того, что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+10x+100}{0,001x^3} = 0.$$

б) Утверждение следует из того, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln^{1000} x}{\sqrt{x}} = 0.$

в) Утверждение следует из того, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{10}e^x}{e^{2x}} = 0.$

558. 1) Задача сводится к доказательству равенства нулю предела

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_{n-1}(x)}{f_n(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \;\Rightarrow\; f_{n-1}(x) = o(f_n(x))$$

при $x \to +\infty$.

2) Это следует из того, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$ при любом $n > 0$. Следовательно, $x^n = o(e^x)$ при $x \to +\infty$.

13 СЕМИНАР: Непрерывные функции. Точки разрыва. Локальные свойства

Декан (на собрании 1-го курса):
«Положение у нас хорошее, но не безнадёжное».
Анекдот.

Домашнее задание: 559–561, 562(а–г), 563(а–г), 564–568, 572–577, 580–586.

13.1 Понятие непрерывности функции в точке и на множестве. Односторонняя непрерывность. Кусочно непрерывные функции

С понятием предела функции тесно связано другое важное понятие математического анализа – понятие непрерывности функции.

Понятие непрерывности в точке и на множестве. Пусть функция $f(x)$ определена на некотором множестве $X \subseteq \mathbb{R}$ и пусть $x_0 \in X$ – (конечная) предельная точка этого множества.

Опр. 1 (*общее определение непрерывности в точке*). Функция $f(x)$ называется *непрерывной при* $x = x_0$ (или в точке x_0), если выполняется условие

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Из определения следует, что для того чтобы функция была непрерывной в точке x_0, необходимо одновременое выполнение следующих факторов:

1) точка x_0 должна быть предельной,

2) функция должна быть определена как в точке x_0, так и в её двусторонней окрестности,

3) функция должна иметь предел в этой точке,

4) значение предела должно быть равно значению функции в данной точке.

Проще говоря, непрерывная функция – это функция без каких-либо «скачков», т. е. такая, у которой малые изменения аргумента приводят к малым же изменениям значения функции, а график представляет собой кривую, которую можно нарисовать, не отрывая ручки от бумаги.

Раскрывая понятие предела по Коши, получим эквивалентное определение непрерывности в точке.

Опр. 2 (*определение непрерывности в точке по Коши*). Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$: как только $|x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Окрестность точки x_0 в данном случае двусторонняя и, в отличие от определения предела, непроколотая, так как функция определена в этой точке.

Раскрывая понятие предела по Гейне, получим ещё одно определение непрерывности в точке.

Опр. 3 (*определение непрерывности в точке по Гéйне*). Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если для любой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента, сходящейся к x_0, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к числу $f(x_0)$.

Это же определение на языке кванторов:

$$f(x) \text{ непрерывна в } x_0 \overset{def}{\Leftrightarrow}$$

$$\forall x_n \in D_f : \{x_n\} \to x_0 \Rightarrow \{f(x_n)\} \to f(x_0).$$

Это означает, что при вычислении предела функции $y = f(x)$, которая является непрерывной в точке x_0, можно переходить к пределу под знаком функции, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right) = f(x_0).$$

Например, $\lim\limits_{x \to 0} e^x = e^{\lim\limits_{x \to 0} x} = e^0 = 1$.

Опр. 4 (*определение непрерывности на множестве*). Функция $f(x)$ называется *непрерывной на множестве* $X \subseteq D(f)$,

если она непрерывна в каждой точке данного множества. В этом случае говорят, что функция $f(x)$ принадлежит классу функций, непрерывных на X и пишут: $f(x) \in C(X)$.

Так как колебанием (скачком) функции в точке мы называли разность правого и левого пределов функции в этой точке, то можно было бы сформулировать понятие непрерывности в точке так: функция непрерывна в точке, если её колебание в данной точке равно нулю.

Все элементарные функции непрерывны в каждой точке их областей определения.

Опр. 5 (*односторонняя непрерывность в точке: слева или справа*). Если в приведённых выше определениях непрерывности в точке заменить двусторонний предел на предел слева (справа), то получим определения непрерывности функции в точке, соответственно, *слева* ($f(x_0 - 0) = f(x_0)$) или *справа* ($f(x_0 + 0) = f(x_0)$).

Пример 158. Функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geqslant 0; \\ 0, & \text{если } x < 0; \end{cases}$$

непрерывна справа в точке $x = 0$. $\square$

Отдельно сформулируем понятие непрерывности функции на сегменте.

Опр. 6 (*определение непрерывности на сегменте*). Функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала (a, b) и, кроме того, непрерывна в точке a справа и в точке b слева.

Теорема 1 (*необходимое и достаточное условие непрерывности в точке*). Функция $f(x)$ непрерывна в заданной точке тогда и только тогда, когда она непрерывна в этой точке и справа, и слева, т. е.

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0). \tag{1}$$

Пример 159. При каких значениях a и b функция

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & \text{если } x > 0; \\ a, & \text{если } x = 0; \\ \frac{b}{2} - x^2, & \text{если } x < 0; \end{cases}$$

непрерывна в точке $x = 0$?

Решение. Запишем условие непрерывности (1) в точке $x = 0$:

$$\lim_{x \to -0} \left(\frac{b}{2} - x^2 \right) = a = \lim_{x \to +0} (1 + x),$$

откуда находим $a = 1$, $b = 2$. $\square$

Существует ещё одно определение непрерывности функции, опирающееся на понятия приращения аргумента и функции.

Рассмотрим функцию $f(x)$, определённую на некотором интервале (a, b), и произвольную точку x_0 из этого интервала. Придадим аргументу x небольшое ненулевое приращение Δx и получим точку $x = x_0 + \Delta x$ из окрестности точки x_0. *Приращением функции* в точке x_0, отвечающим приращению аргумента Δx, называется разность $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ соответствующих значений функции.

Опр. 7 (*определение непрерывности в точке через приращения*). Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если бесконечно малому приращению аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Пример 160. Ка́нторова лестница – пример нестандартной непрерывной функции (ранее мы рассматривали её построение). Это монотонно неубывающая функция, отображающая отрезок $[0, 1]$ в отрезок $[0, 1]$. Она не является константой, но при этом имеет производную, равную нулю почти во всех точках отрезка $[0, 1]$ (т. е. практически нигде не растёт, но при этом на множестве нулевой меры успевает «вырасти» от 0 до 1). Иногда называют «чёртовой лестницей».

Кусочно непрерывные функции. Функция $f(x)$ называется *кусочно непрерывной на сегменте* $[a, b]$, если эта функция

определена всюду на сегменте $[a, b]$, непрерывна во всех внутренних точках этого сегмента, за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых она имеет разрыв первого рода и, кроме того, имеет правый предел в точке a и левый предел в точке b.

Функция $f(x)$ называется *кусочно непрерывной на интервале (или на бесконечной прямой)*, если $f(x)$ кусочно непрерывна на любом принадлежащем этому интервалу (или бесконечной прямой) сегменте.

Пример 161. Функция $f(x) = [x]$ кусочно непрерывна на бесконечной прямой. □

13.2 Понятие разрывности функции в точке. Классификация точек разрыва

«Избыток пищи мешает тонкости ума».

Луций Анней Се́нека (4 год до н.э.—65 год н.э.) – древнеримский философ.

Опр. 8 (*определение точки разрыва функции*). Если хотя бы одно из условий в определении непрерывности в точке x_0 нарушается, то функцию $f(x)$ называют *разрывной* в этой точке (или говорят, что функция *терпит разрыв* в этой точке). Саму точку x_0 называют *точкой разрыва* функции.

Другими словами, либо функция $f(x)$ не определена в точке x_0, либо в этой точке не существует предела, либо предел есть, но он не совпадает со значением функции в этой точке.

Согласно классификации, точки разрыва подразделяются на точки устранимого разрыва, точки разрыва 1-го рода и точки разрыва 2-го рода.

1. Если предел функции $f(x)$ в точке x_0 существует и конечен, но функция либо не определена в этой точке, либо её предел не совпадает со значением функции в данной точке:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0),$$

то точка x_0 называется точкой *устранимого разрыва* функции $f(x)$. Если «поправить» функцию $f(x)$ в точке устранимого разрыва, положив $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, то получится функция, непрерывная в данной точке. Такая операция над функцией называется доопределением функции до непрерывной, или доопределением функции по непрерывности, что и обосновывает название точки как точки устранимого разрыва.

Пример 162. Функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \neq 0; \\ 1, & \text{если } x = 0; \end{cases}$$

имеет устранимый разрыв в точке $x = 0$. Но, положив в этой точке значение функции равным пределу (нулю), можно сделать эту функцию всюду непрерывной. □

2. Если оба односторонних предела в точке x_0 существуют, конечны, но не равны, то такую точку называют *точкой разрыва первого рода*. Эти точки ещё называют точками разрыва типа «скачок» (так как функция претерпевает скачок значений в таких точках), а под «скачком» понимают разность правого и левого пределов.

Пример 163. Функция $y = \operatorname{sgn} x$ имеет (неустранимый) разрыв 1-го рода в точке $x = 0$. □

Пример 164. Функции $y = \{x\}$ (дробная часть) и $y = [x]$ (целая часть) имеют разрыв 1-го рода (скачок) во всех точках вида $x = n \in \mathbb{Z}$. □

3. Все остальные точки разрыва относят к *точкам разрыва 2-го рода*. В этом случае хотя бы один из односторонних пределов не существует или бесконечен.

Пример 165. Функция $y = \sin \dfrac{1}{x}$ имеет разрыв 2-го рода в точке $x = 0$, так как предел в этой точке не существует. □

Пример 166. Функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leqslant 0; \\ \frac{1}{x}, & \text{если } x > 0; \end{cases}$$

имеет разрыв 2-го рода в точке $x = 0$, поскольку правый предел в этой точке равен $+\infty$. $\square$

Пример 167. Функция $f(x) = \left\{\dfrac{1}{x}\right\}$, где $\{\cdot\}$ – дробная часть, имеет разрыв 2-го рода в точке $x = 0$, поскольку

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x}\right\} = \left|t = \frac{1}{x}\right| = \lim_{t\to\infty}\{t\},$$

а последний предел не существует. $\square$

См. также пример с функцией Дирихле (среди задач для самостоятельного решения).

13.3 О точках разрыва монотонной функции. Критерий непрерывности монотонной функции

«Три пути ведут к знанию: путь размышления – это путь самый благородный, путь подражания – это путь самый легкий и путь опыта – это путь самый горький».

Конфуций (551 год до н.э.—479 год до н.э.) – древний мыслитель и философ Китая, основатель философской системы, известной как конфуцианство. Считается, что Конфуций основал первый в мире университет.

Следующие утверждения проливает свет на природу точек разрыва монотонной функции.

Теорема 2 (*о точках разрыва монотонной функции*). Если функция $f(x)$ определена на сегменте $[a, b]$ и является монотонной[1] на этом сегменте, то она может иметь на этом сегменте только точки разрыва первого рода, причём множество всех её точек разрыва не более чем счётно.

Пример 168. Можно ли функцию Дирихле на сегменте $[0, 1]$ представить в виде разности двух монотонных функций?

[1] То есть либо неубывающей, либо невозрастающей.

Решение. Предположим, что такое представление функции Дирихле возможно: $D(x) = f(x) - g(x)$, где f и g – монотонны на $[0,1]$. Известно, что монотонная функция имеет на любом сегменте не более чем счётное число точек разрыва. Тогда каждая из функций f и g, а следовательно и их разность, имеют на $[0,1]$ не более счётного количества точек разрыва. С другой стороны, функция Дирихле разрывна в каждой точке сегмента, таких точек – континуум. Противоречие. Существенным здесь также является разный характер точек разрыва. $\square$

Теорема 3 (*необходимое и достаточное условие непрерывности монотонной функции*). Пусть функция $f(x)$ определена и монотонна на сегменте $[a,b]$. Тогда $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ тогда и только тогда, когда для любого числа l, лежащего между $f(a)$ и $f(b)$, найдётся такая точка $c \in [a,b]$, что $f(c) = l$. Иными словами, когда функция принимает все промежуточные значения между значениями на концах этого сегмента.

13.4 Локальные свойства непрерывных функций. Теоремы Вейерштрасса

Свойства непрерывных функций можно подразделить на локальные (характеризующие поведение функции в малой окрестности рассматриваемой точки) и глобальные (отражающие поведение функции на целом множестве). Обратимся к первым.

Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ – функция, непрерывная в точке $x_0 \in X$. Тогда справедливы следующие утверждения.

Теорема 4 (*локальная ограниченность*). Функция, непрерывная в точке x_0, является ограниченной в некоторой окрестности этой точки.[1]

Теорема 5 (*локальное сохранение знака*). Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) > 0$ (или $f(x_0) < 0$), то $f(x) > 0$ (или $f(x) < 0$) для всех x, достаточно близких к x_0.

Теорема 6 (*арифметические операции над непрерывными*

[1] Для локальной ограниченности функции в окрестности точки x_0 достаточно существования предела функции в этой точке.

в точке функциями). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве X и непрерывны в точке $x_0 \in X$. Тогда функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ непрерывны в точке x_0. Если $g(x_0) \neq 0$, то функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ также непрерывна в этой точке.

Опр. 9 (*определение сложной функции*). Пусть функция $x = x(t)$ определена на множестве T и X – множество её значений. Пусть на множестве X задана функция $y = f(x)$. Тогда говорят, что на множестве T задана *сложная функция* (или *композиция функций*) $y = f(x(t))$.

Теорема 7 (*локальная непрерывность сложной функции*). Пусть функция $x = x(t)$ непрерывна в точке t_0, а функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = x(t_0)$. Тогда сложная функция $y = f(x(t))$ непрерывна в точке t_0.

Следующие две теоремы описывают важные свойства функций, непрерывных на сегменте.

Теорема 8 (*Первая теорема Вейерштра́сса*). Непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ ограничена на этом сегменте.

Теорема 9 (*Вторая теорема Вейерштра́сса*). Непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ достигает на этом сегменте своих точной нижней и точной верхней граней.

Иными словами, найдутся $x_1, x_2 \in [a, b]$:

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_1), \qquad \sup_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_2).$$

Пример 169. Функция $f(x) = \operatorname{arctg}(12x^{23} - 16x) + 5\sin 3x - \frac{7}{\cos x}$ непрерывна на сегменте $[0, 1]$ (как суперпозиция и сумма непрерывных функций), поэтому, в силу теорем Вейерштрасса, ограничена на нём и достигает своих точных граней. □

13.5 Задачи для самостоятельного решения

№559. [6, №666] С помощью $\varepsilon - \delta$ рассуждений доказать, что функция $f(x) = x^2$ непрерывна при $x = 5$.

№560. [6, №668] Сформулировать на языке $\varepsilon - \delta$ в положительном смысле следующее утверждение: функция $f(x)$, определённая в точке $x = x_0$, не является непрерывной в этой точке.

№561. [6, №669] Пусть для некоторых чисел $\varepsilon > 0$ можно найти соответствующие числа $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ такие, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, если только $|x - x_0| < \delta$. Можно ли утверждать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, если: а) числа ε образуют конечное множество; б) числа ε образуют бесконечное множество двоичных дробей $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

№562. [6, №674(а–г)] С помощью $\varepsilon - \delta$ рассуждений доказать непрерывность в точке x_0 следующих функций:

а) $y = ax + b$, б) $y = x^2$; в) $y = x^3$; г) $y = \sqrt{x}$.

№563. [6, №674(д–з)] С помощью $\varepsilon - \delta$ рассуждений доказать непрерывность в точке x_0 следующих функций:

а) $y = \sqrt[3]{x}$, б) $y = \sin x$; в) $y = \cos x$; г) $y = \operatorname{arctg} x$.

№564. [6, №670] Пусть дана функция $f(x) = x + 0,001[x]$. Показать, что для каждого $\varepsilon > 0,001$ можно подобрать $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ такое, что $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$, если только $|x' - x| < \delta$, а для $0 < \varepsilon \leqslant 0,001$ для всех значений x этого сделать нельзя. В каких точках нарушается непрерывность этой функции?

№565. [6, №671] Пусть для каждого достаточно малого числа $\delta > 0$ существует $\varepsilon = \varepsilon(\delta, x_0) > 0$ такое, что если $|x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Следует ли отсюда, что функция $f(x)$ непрерывна при $x = x_0$? Какое свойство функции $f(x)$ описывается данными неравенствами?

№566. [6, №672] Пусть для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ такое, что если $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, то $|x - x_0| < \delta$. Следует ли отсюда, что функция $f(x)$ непрерывна при $x = x_0$? Какое свойство функции $f(x)$ описывается данными неравенствами?

№567. [6, № 673] Пусть для каждого $\delta > 0$ существует число $\varepsilon = \varepsilon(x_0, \delta) > 0$: если $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, то $|x - x_0| < \delta$. Следует ли отсюда, что функция $f(x)$ непрерывна при $x = x_0$? Какое свойство функции $f(x)$ описывается данными неравенствами? Рассмотреть пример

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & \text{если } x - \text{рационально;} \\ \pi - \operatorname{arctg} x, & \text{если } x - \text{иррационально.} \end{cases}$$

№568. Показать, что функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x - \text{рационально;} \\ 0, & \text{если } x - \text{иррационально,} \end{cases}$$

разрывна в любой точке. Охарактеризовать точки разрыва.

№569. Исследовать на непрерывность сложную функцию $f(x) = D(D(x))$, $x \in \mathbb{R}$, где $D(x)$ – функция Дирихле.

№570. Каким числом можно доопределить функцию $f(x) = \operatorname{arcctg} \dfrac{3}{x}$ в точке $x = 0$, чтобы она стала непрерывной в этой точке?

№571. Найти точки разрыва и исследовать их характер:

$$f(x) = \frac{2x - 3}{\log_2 |x|}.$$

№572. [6, № 680] Исследовать на непрерывность и построить эскиз графика функции

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

№573. [6, № 681] Исследовать на непрерывность и построить эскиз графика функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

№574. [6, № 682] Исследовать на непрерывность и построить эскиз графика функции

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}, & \text{если } x \neq 1; \\ \text{произвольно}, & \text{если } x = 1. \end{cases}$$

№575. [6, № 683] Исследовать на непрерывность (в зависимости от значений параметра a) и построить эскиз графика функции

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \ln(x^2), & \text{если } x \neq 0; \\ a, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

№576. [6, № 686] Исследовать на непрерывность и построить эскиз графика функции

$$f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}].$$

№577. [6, № 694] Определить точки разрыва функции и исследовать характер этих точек

$$f(x) = \operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right).$$

№578. Определить точки разрыва функции и исследовать характер этих точек

$$f(x) = x \cdot \operatorname{sgn}\left(\sin\frac{1}{x}\right).$$

№579. [6, № 698] Определить точки разрыва функции и исследовать характер этих точек

$$f(x) = e^{x+\frac{1}{x}}.$$

№580. [6, № 707] Исследовать на непрерывность и построить эскиз графика функции

$$f(x) = x \cdot \left[\frac{1}{x}\right].$$

№581. [6, № 708] Исследовать на непрерывность и построить эскиз графика функции

$$f(x) = \operatorname{sgn}\left(\cos\frac{1}{x}\right).$$

№582. Найти все точки разрыва функции и охарактеризовать их (согласно классификации):

$$f(x) = \frac{1}{e^{\frac{x}{x^2-1}}-1} \cdot [x].$$

№583. [6, № 720] Исследовать на непрерывность и построить эскиз графика функции

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+x^n} \quad (x \geqslant 0).$$

№584. [6, № 724] Исследовать на непрерывность и построить эскиз графика функции

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}.$$

№585. [6, № 726] Исследовать на непрерывность и построить эскиз графика функции

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x+x^2\cdot e^{nx}}{1+e^{nx}}.$$

№586. Существует ли непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, принимающая рациональные значения в иррациональных точках и иррациональные значения в рациональных точках?

№587. Функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[0,1]$ и $f(x) = 0$ для любой рациональной точки $x \in [0,1]$. Доказать, что $f(x) \equiv 0$ на $[0,1]$.

13.6 Ответы и решения

559. По определению непрерывности функции в точке, необходимо показать, что для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$: как только $|x-5| < \delta$, то $|x^2-25| < \varepsilon$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим

$$|x^2-25| = |(x-5)(x+5)| = |x-5||(x-5)+10| \leqslant |x-5|(|x-5|+10) <$$

$$< \delta(\delta+10).$$

Если теперь составить и решить неравенство $\delta(\delta+10) < \varepsilon$, то получим $\delta \in \left(0, \frac{\sqrt{100+4\varepsilon}-10}{2}\right)$. При таком выборе $\delta(\varepsilon)$ определение выполняется и, значит, мы доказали непрерывность функции в заданной точке.

560. Функция $f(x)$, определённая в точке x_0, не является непрерывной в этой точке, если существует положительное число ε такое, что для любого (сколь угодно малого!) $\delta > 0$ найдётся x из окрестности $|x-x_0| < \delta$ такое, что $|f(x)-f(x_0)| \geqslant \varepsilon$.

561. а) Если числа $\varepsilon > 0$ образуют конечное множество, то существует наименьшее из них число $\varepsilon_0 > 0$. Тогда для любого $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ уже, вообще говоря, не существует числа $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$, требуемого в определении непрерывности функции. Поэтому утверждать, что функция непрерывна, нельзя.

б) Да, функция непрерывна, так как $\forall \varepsilon_1 > 0\ \exists N_0 : \forall n > N_0$ $\varepsilon = \frac{1}{2^n} < \varepsilon_1$. А всякое $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$ из определения непрерывности, пригодное для $\varepsilon > 0$, является подходящим и для $\forall \varepsilon_1 > \varepsilon$.

562. а) Достаточно доказать, что для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$: как только $|x-x_0| < \delta$, то $|(ax+b)-(ax_0+b)| < \varepsilon$. Имеем

$$|(ax+b)-(ax_0+b)| = |a||x-x_0| < |a|\delta.$$

Выберем любое $\varepsilon > 0$, составим неравенство $|a|\delta < \varepsilon$ и найдём из него $\delta < \varepsilon/|a|$. Тогда получим, что $\forall x \in \mathbb{R}$ из окрестности $|x-x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|(ax+b)-(ax_0+b)| < |a|\delta < \varepsilon$, что доказывает непрерывность линейной функции в точке x_0.

б) Имеем

$$|x^2 - x_0^2| = |(x - x_0)(x + x_0)| = |x - x_0||(x - x_0) + 2x_0| \leqslant$$

$$\leqslant |x - x_0|(|x - x_0| + 2|x_0|) < \delta(\delta + 2|x_0|).$$

Выберем любое $\varepsilon > 0$, составим неравенство $\delta(\delta + 2|x_0|) < \varepsilon$ и найдём из него $\delta \in (0, \sqrt{|x_0|^2 + \varepsilon} - |x_0|)$. Тогда как только $|x - x_0| < \delta$, то $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$, что доказывает непрерывность функции x^2 в произвольной точке x_0.

в) Зафиксируем произвольно малое $\varepsilon > 0$ и рассмотрим

$$|x^3 - x_0^3| = |(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)| = |x - x_0||(x - x_0)^2 + 3xx_0| =$$

$$= |x - x_0||(x - x_0)^2 + 3(x - x_0)x_0 + 3x_0^2| \leqslant$$

$$\leqslant |x - x_0|(|x - x_0|^2 + 3|x_0||x - x_0| + 3|x_0|^2) < \delta(\delta^2 + 3|x_0|\delta + 3|x_0|^2)$$

$$= (\delta^3 + 3\delta^2|x_0| + 3\delta|x_0|^2 + |x_0|^3) - |x_0|^3 = (\delta + |x_0|)^3 - |x_0|^3 < \varepsilon,$$

откуда $(\delta + |x_0|)^3 < \varepsilon + |x_0|^3$, т. е. $\delta + |x_0| < \sqrt[3]{\varepsilon + |x_0|^3} \Rightarrow 0 < \delta < \sqrt[3]{\varepsilon + |x_0|^3} - |x_0|$. Если в качестве δ взять любое число из найденного интервала, то будет выполняться определение непрерывности функции x^3 в точке x_0.

г) Пусть $x_0 > 0$ – произвольно и $\varepsilon > 0$ – достаточно мало, тогда

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \left|\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}\right| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \frac{\delta}{\sqrt{x_0}} < \varepsilon,$$

откуда находим $0 < \delta < \varepsilon\sqrt{x_0}$.

563. а) Достаточно доказать, что для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$: как только $|x - x_0| < \delta$, то $|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}| < \varepsilon$. Имеем

$$|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xx_0} + \sqrt[3]{x_0^2}} = \frac{|x - x_0|}{(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{x_0})^2 + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x_0^2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|x-x_0|}{\frac{3}{4}\sqrt[3]{x_0^2}} < \frac{\delta}{\frac{3}{4}\sqrt[3]{x_0^2}} < \varepsilon,$$

откуда $0 < \delta < \varepsilon \cdot \frac{3}{4}\sqrt[3]{x_0^2}$. Тогда как только $|x - x_0| < \delta$, то выполняется неравенство $|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}| < \varepsilon$, что доказывает непрерывность функции в точке x_0.

б) Имеем

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\cdot\cos\frac{x+x_0}{2}\right| =$$

$$= 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant 2\cdot\frac{|x-x_0|}{2} =$$

$$= |x-x_0| < \delta < \varepsilon.$$

в) Имеем

$$|\cos x - \cos x_0| = 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\cdot\sin\frac{x+x_0}{2}\right| =$$

$$= 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\left|\sin\frac{x+x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant 2\cdot\frac{|x-x_0|}{2} =$$

$$= |x-x_0| < \delta < \varepsilon.$$

г) Воспользуемся тригонометрическим тождеством

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} x_0 = \operatorname{arctg}\frac{x-x_0}{1+xx_0} \quad (xx_0 > -1).$$

Условие $xx_0 > -1$ в данном случае выполняется, т. к. x принадлежит малой окрестности точки x_0 и поэтому можно считать, что x и x_0 имеют один знак (случай $x_0 = 0$ можно рассмотреть отдельно). Тогда, используя неравенство $|\operatorname{arctg}\alpha| \leqslant |\alpha|$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), получаем

$$|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} x_0| = \left|\operatorname{arctg}\frac{x-x_0}{1+xx_0}\right| \leqslant \left|\frac{x-x_0}{1+xx_0}\right| = \frac{|x-x_0|}{1+xx_0} <$$

$$< |x-x_0| < \delta < \varepsilon.$$

564. 1) Пусть $x_0 \notin \mathbb{Z}$, тогда $\exists\, n \in \mathbb{Z} : x_0 \in (n, n+1)$. Покажем, что $f(x)$ непрерывна в точке x_0. Так как $x_0 \in (n, n+1)$, то существует окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (n, n+1)$. Пусть x принадлежит этой окрестности, тогда целые части у x и x_0 равны. Рассмотрим разность

$$|f(x)-f(x_0)| = |(x+0,001[x])-(x_0+0,001[x_0])| = |x-x_0| < \delta < \varepsilon,$$

(если выбрать $\delta < \varepsilon$), т. е. функция непрерывна в любой такой точке.

2) Пусть теперь $x_0 \in \mathbb{Z}$, тогда $\exists\, n \in \mathbb{Z} : x_0 = n$. Покажем, что $f(x)$ не является непрерывной в точке x_0. Рассмотрим односторонние пределы в этой точке и покажем, что они не равны. В самом деле,

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \to n+0} (x + 0,001[x]) = n + 0,001 \cdot n = 1,001n;$$

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to n-0} (x + 0,001[x]) = n + 0,001 \cdot (n-1) \neq 1,001n.$$

Поскольку $f(n-0) \neq f(n+0)$, при этом оба предела конечны, то это означает, что функция терпит в целочисленных точках разрывы 1-го рода.

Однако, если $\varepsilon > 0,001$, то можно подобрать $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$ так, чтобы уже в любой точке x_0 выполнялось

$$|f(x) - f(x_0)| = |(x + 0,001[x]) - (x_0 + 0,001[x_0])| =$$

$$= |(x - x_0) + 0,001([x] - [x_0])| \leqslant |x - x_0| + 0,001|[x] - [x_0]| \leqslant$$

(если взять $|x - x_0| < \delta < 1 \Rightarrow |[x] - [x_0]| \leqslant 1$)

$$\leqslant |x - x_0| + 0,001 \cdot 1 < \delta + 0,001 < \varepsilon$$

(достаточно выбрать $\delta < \varepsilon - 0,001$).

565. Не следует. Рассмотрим в качестве примера $y = \operatorname{sgn} x$, $x_0 = 0$. Для любого достаточно малого $\delta > 0$ существует $\varepsilon = 1$: если $|x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. Итак, для данной функции условия выполняются, но функция не является непрерывной в нуле. Сформулированные в задаче условия определяют лишь локальную ограниченность функции $f(x)$ (в малой окрестности точки x_0).

566. Нет, не следует. Например, рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant x < 1; \\ 1, & \text{если } 1 \leqslant x \leqslant 2, \end{cases}$$

$x_0 = 1$. Возьмём произвольное $\varepsilon > 1$, тогда для каждого такого ε найдётся $\delta = 2$ такое, что если $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, то $|x - x_0| < \delta = 2$. Для $0 < \varepsilon \leqslant 1$ условие $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ в точке $x_0 = 1$ не выполняется.

Вообще, если функция $f(x)$ определена на конечном промежутке (a, b), то эти неравенства выполняются всегда (в качестве δ можно выбрать длину интервала $(b - a)$). Если же интервал имеет вид $(-\infty, b)$, $(a, +\infty)$ или $(-\infty, +\infty)$, то условия задают следующее свойство: $\lim\limits_{x\to\infty} |f(x)| = +\infty$ (т. е. никакое значение функция не должна принимать бесконечное число раз).

567. Сформулированные в задаче условия описывают условия однозначности и непрерывности обратной к $f(x)$ функции. Для функции из примера условия задачи выполняются для любого x_0 (при этом $f(x_0) \neq \frac{\pi}{2}$). Обратная функция для функции из примера:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \operatorname{tg} y, & \text{если } y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),\ y \in \mathbb{Q}; \\ -\operatorname{tg} y, & \text{если } y \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}),\ y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$$

568. Пусть x_0 – произвольное действительное число, $D(x)$ – функция Дирихле. Покажем, что предел $D(x)$ в точке x_0 не существует, а значит, каждая точка является точкой разрыва 2-го рода.

В самом деле, возьмём последовательность $\{x'_n\}$, состоящую из рациональных чисел и сходящуюся к точке x_0, тогда $\lim\limits_{n\to+\infty} D(x'_n) = 1$. С другой стороны, если выбрать последовательность $\{x''_n\}$, состоящую из иррациональных чисел и сходящуюся к точке x_0, то получим $\lim\limits_{n\to+\infty} D(x''_n) = 0$, что противоречит определению предела по Гейне (единственности предела).

569. Если x рационально, то $D(x) = 1$, следовательно, $D(D(x)) = 1$. Если же x иррационально, то $D(x) = 0$ и поэтому $D(D(x)) = 1$. Таким образом, получаем постоянную функцию

$f(x) \equiv 1$, которая непрерывна на всём множестве действительных чисел.

570. Подобная операция возможна в том случае, если $x = 0$ есть точка устранимого разрыва, т. е. существует конечный предел функции в этой точке. Найдём односторонние пределы данной функции в точке:

$$\lim_{x \to -0} \operatorname{arcctg} \frac{3}{x} = \left| \, t = \frac{3}{x} \, \right| = \lim_{t \to -\infty} \operatorname{arcctg} t = \pi,$$

$$\lim_{x \to +0} \operatorname{arcctg} \frac{3}{x} = \left| \, t = \frac{3}{x} \, \right| = \lim_{t \to +\infty} \operatorname{arcctg} t = 0.$$

Следовательно, предел данной функции в точке $x = 0$ не существует, поэтому доопределить функцию до непрерывной в этой точке невозможно.

571. Данная функция не существует при трёх значениях аргумента: $x = 0$ и $x = \pm 1$ (в первом случае знаменатель не существует, во втором он равен нулю). Каждая из найденных точек является точкой разрыва, исследуем их характер.

1) При $x \to 0$ имеем:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x - 3}{\log_2 |x|} = \lim_{x \to 0} (2x - 3) \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\log_2 |x|} = -3 \cdot 0 = 0.$$

Следовательно, $x = 0$ – точка устранимого разрыва.

2) При $x \to \pm 1$ имеем $|x| \to 1 \Rightarrow \log_2 |x| \to 0 \Rightarrow \dfrac{1}{\log_2 |x|} \to \infty$. Следовательно, это точки разрыва 2-го рода.

572. Заметим, что функция чётная, имеет нули $x = 0$, $x = \frac{1}{\pi k}$ $(k = \pm 1, \pm 2, ...)$. График расположен в областях $|y| \leqslant |x|$. По мере приближения к точке $x = 0$ график колеблется (осциллирует) с возрастающей до бесконечности частотой. Непрерывность функции $f(x)$ при $x = 0$ следует из того, что $|f(x) - f(0)| = \left| x \cdot \sin \frac{1}{x} \right| \leqslant |x| \cdot |\sin \frac{1}{x}| \leqslant |x| < \delta \leqslant \varepsilon$ при $|x| < \delta = \varepsilon$. Непрерывность в других точках обосновывается непрерывностью суперпозиции непрерывных функций. Постройте эскиз самостоятельно.

573. Так как $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, то функция непрерывна при любом $x \in \mathbb{R}$. Нулей у функции нет, кроме $x = 0$. Локальных экстремумов нет, т. к. $f'(x) = \frac{2}{e^{\frac{1}{x^2}} \cdot x^3} \neq 0$. Функция чётная, принимает только неотрицательные значения (равна нулю только при $x = 0$). Так как $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$, то график функции имеет горизонтальную асимптоту $y \equiv 1$. (Если студент уже знаком с понятием выпуклости вверх (вниз), то желательно для получения дополнительной информации о поведении функции, исследовать функцию с помощью второй производной на выпуклость и точки перегиба.) Эскиз графика постройте самостоятельно.

574. Так как $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = 1 \neq 0 = \lim\limits_{x\to 1+0} f(x)$, то функция разрывна при $x = 1$ (разрыв 1-го рода). В остальных точках она непрерывна. Для построения эскиза графика найдём $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{1}{2}$. Производная $f'(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{\left(1+e^{\frac{1}{x-1}}\right)^2 (x-1)^2} > 0$, т. е. функция возрастает на каждом из промежутков $x < 1$ и $x > 1$. Постройте эскиз самостоятельно.

575. Найдём $\lim\limits_{x\to 0}(x \cdot \ln(x^2)) = \lim\limits_{x\to 0}(2x \ln|x|) = 0$, т. к. степенная функция стремится к нулю быстрее, чем логарифмическая. Поэтому функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = 0$, если $a = 0$, и имеет устранимый разрыв, если $a \neq 0$. Функция нечётная. Найдём нули: $x \cdot \ln(x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0; \pm 1$. Далее, $\lim\limits_{x\to\infty}(x \cdot \ln(x^2)) = \infty$. Точки экстремума: $f'(x) = \ln(x^2) + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{e}$, $f(\frac{1}{e}) = -\frac{2}{e}$. Постройте эскиз самостоятельно.

576. Область определения: $x \geqslant 0$. Упростим функцию $f(x) = \{\sqrt{x}\}$ на каждом из промежутков:
если $0 \leqslant \sqrt{x} < 1$, т. е. $0 \leqslant x < 1$, то $[\sqrt{x}] = 0 \Rightarrow$

$$f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}] = \sqrt{x};$$

если $1 \leqslant \sqrt{x} < 2$, т. е. $1 \leqslant x < 4$, то $[\sqrt{x}] = 1 \Rightarrow$

$$f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}] = \sqrt{x} - 1;$$

если $2 \leqslant \sqrt{x} < 3$, т. е. $4 \leqslant x < 9$, то $[\sqrt{x}] = 2 \Rightarrow$

$$f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}] = \sqrt{x} - 2;$$

.....

В точках $x = n^2$ $(n \in \mathbb{N})$ функция терпит разрывы 1-го рода, т. к. $f(n^2 - 0) = 1$, $f(n^2 + 0) = 0$. В остальных точках функция является непрерывной (в точке $x = 0$ непрерывна справа). Эскиз графика постройте самостоятельно.

577. Функция не определена при $x = 0$. Так как $\lim\limits_{x \to +0} \sin \frac{\pi}{x}$ не существует, то $\lim\limits_{x \to +0} f(x)$ также не существует, поэтому $x = 0$ – точка разрыва 2-го рода. Найдём другие точки разрыва: $\sin \frac{\pi}{x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{k}$, $k = \pm 1, \pm 2, ..,$ – точки разрыва 1-го рода (вычислите односторонние пределы и покажите, что они конечны, но не равны).

578. Функция не определена при $x = 0$. Так как функция $\operatorname{sgn}(\sin \frac{1}{x})$ ограничена, а x – бесконечно малая при $x \to 0$ функция, то $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = 0$, поэтому $x = 0$ – точка устранимого разрыва. Найдём другие точки разрыва: $\sin \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\pi k}$, $k = \pm 1, \pm 2, ..,$ – точки разрыва 1-го рода (вычислите односторонние пределы и покажите, что они конечны, но не равны).

579. Функция не определена при $x = 0$. Так как $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = 0$, то $x = 0$ – точка разрыва 2-го рода. В остальных точках функция непрерывна как суперпозиция непрерывных функций.

580. Функция не определена при $x = 0$. Чтобы определить тип этой точки разрыва, вычислим предел (замена $y = \frac{1}{x}$):

$$\lim_{x \to 0} \left(x \cdot \left[\frac{1}{x} \right] \right) = \lim_{y \to \infty} \frac{[y]}{y} = \lim_{y \to \infty} \frac{y - \{y\}}{y} = 1 - \lim_{y \to \infty} \frac{\{y\}}{y} = 1.$$

Следовательно, $x = 0$ – точка устранимого разрыва (если положить $f(0) = 1$, то функция станет непрерывной в этой точке). Для построения эскиза графика рассмотрим промежутки:
если $0 < \frac{1}{x} < 1 \Leftrightarrow x > 1$, то $f(x) = 0$;
если $1 \leqslant \frac{1}{x} < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x \leqslant 1$, то $f(x) = x$;
если $2 \leqslant \frac{1}{x} < 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} < x \leqslant \frac{1}{2}$, то $f(x) = 2x$;
если $3 \leqslant \frac{1}{x} < 4 \Leftrightarrow \frac{1}{4} < x \leqslant \frac{1}{3}$, то $f(x) = 3x$;
.....
если $-1 \leqslant \frac{1}{x} < 0 \Leftrightarrow x \leqslant -1$, то $f(x) = -x$;

если $-2 \leqslant \frac{1}{x} < -1 \Leftrightarrow -1 < x \leqslant -\frac{1}{2}$, то $f(x) = -2x$;
если $-3 \leqslant \frac{1}{x} < -2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x \leqslant -\frac{1}{3}$, то $f(x) = -3x$;
.....
Точки разрыва: $x = \frac{1}{k}$, $k = \pm 1, \pm 2, ...$ Исследуем характер этих точек разрыва: $\lim\limits_{x \to \frac{1}{k}+0} f(x) = \frac{1}{k} \cdot (k-1)$, $\lim\limits_{x \to \frac{1}{k}-0} f(x) = \frac{1}{k} \cdot k = 1$, поэтому в этих точках имеем разрывы 1-го рода (типа скачок).

581. В точке $x = 0$ функция не определена. Предел $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ не существует, следовательно, $x = 0$ – точка разрыва 2-го рода. Найдём другие точки разрыва: $\cos \dfrac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{\pi(2n+1)}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ – точки разрыва 1-го рода. Функция чётная. Если $0 < \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ $(\Rightarrow \cos x \geqslant 0) \Leftrightarrow x > \dfrac{2}{\pi}$. Найдём, когда $\cos x > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{\pi(4n+1)} < x < \dfrac{2}{\pi(4n-1)}$, $n \in \mathbb{N}$ $(x > 0)$. Эскиз графика постройте самостоятельно.

582. 1) $x = 1$ – точка устранимого разрыва, т. к. $f(1+0) = f(1-0) = 0$;
2) $x = -1$ – точка разрыва 1-го рода, т. к. $f(-1-0) = 2$, $f(-1+0) = 0$;
3) $x = 0$ – точка разрыва 2-го рода, т. к. $f(+0) = 0$, $f(-0) = -\infty$;
4) $x = n$ $(n \neq 0, \pm 1)$, – точки разрыва 1-го рода, т. к. $f(n+0) = \frac{1}{e^{\frac{n}{n^2-1}-1}} \cdot n$, $f(n-0) = \frac{1}{e^{\frac{n}{n^2-1}-1}} \cdot (n-1)$.

583. Для упрощения функции рассмотрим случаи $0 \leqslant x < 1$, $x = 1$, $x > 1$:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant x < 1; \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x = 1; \\ 0, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Эскиз графика постройте самостоятельно. Точка $x = 1$ – разрыв 1-го рода (скачок).

584. Для упрощения функции рассмотрим случаи $|\sin x| < \frac{1}{2}$ (т. е. $|x - \pi k| < \frac{\pi}{6}$), $|\sin x| = \frac{1}{2}$ (т. е. $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$) и $|\sin x| > \frac{1}{2}$ (т. е. $\frac{\pi}{6} < |x - \pi k| < \frac{5\pi}{6}$):

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{если } |\sin x|<\frac{1}{2};\\ \frac{x}{2}, & \text{если } |\sin x|=\frac{1}{2};\\ 0, & \text{если } |\sin x|>\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Функция нечётная. Точки $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$ $(k\in\mathbb{Z})$ – разрывы 1-го рода. Эскиз графика постройте самостоятельно.

585. Для упрощения функции рассмотрим случаи $x>0$, $x=0$ и $x<0$:

$$f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(x-x^2)+x^2(1+e^{nx})}{1+e^{nx}}=x^2, & \text{если } x>0;\\ 0, & \text{если } x=0;\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}=x, & \text{если } x<0. \end{cases}$$

Эскиз графика постройте самостоятельно. Функция непрерывна при всех $x\in\mathbb{R}$.

586. Нет. У такой функции будет не более счётного множества значений, чего с непостоянной непрерывной функцией случиться не может.

587. От противного, предположим, что в некоторой иррациональной точке $x_0\in(0,1)$ функция $f(x)$ принимает отличное от нуля значение $f(x_0)$. Тогда, в силу непрерывности, найдётся окрестность этой точки, в которой функция принимает значения того же знака, что и $f(x_0)$. Но в этой окрестности заведомо найдутся рациональные точки, в которых по условию функция равна 0. Противоречие. Следовательно, в любой иррациональной точке из $(0,1)$ функция принимает значение, равное нулю, а значит, она тождественно равна нулю на всём сегменте $[0,1]$.

14 СЕМИНАР: Свойства непрерывных функций (продолжение). Равномерная непрерывность

«– Убеждён, что наука и исследовательская деятельность приносят больше удовольствия, чем зарабатывание денег».

Сти́вен Хо́кинг (1942–2018) – английский физик-теоретик и популяризатор науки.

Домашнее задание: 588–593, 594(а,б), 595–605.

ВНИМАНИЕ:
На следующем занятии (во вторник) – контрольная работа! А в пятницу – коллоквиум.

14.1 Глобальные свойства непрерывных функций: теоремы Больцано-Коши, непрерывность обратной функции

Справедливы следующие теоремы, отражающие глобальные свойства непрерывных функций, т. е. присущие им не в локальной окрестности какой-либо точки, а на целом промежутке.

Теорема 1 (*1-я теорема Больца́но–Коши́*[1] *о существовании нуля у функции, непрерывной на сегменте и принимающей на его концах значения разных знаков*). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и $f(a)f(b) < 0$. Тогда на этом сегменте найдётся такая точка c, что $f(c) = 0$.

Теорема 2 (*2-я теорема Больца́но–Коши о прохождении непрерывной функции через все промежуточные значения*). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$. Тогда эта функция принимает на каждом интервале $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ все промежуточные значения между $f(\alpha)$ и $f(\beta)$.[2]

[1] Бернард *Больцано* (1781–1848) – чешский математик, философ и теолог, автор первой строгой теории вещественных чисел и один из основоположников теории множеств.

[2] Таким образом, непрерывная на сегменте функция принимает все свои значения от наименьшего до наибольшего.

Теорема 3 (*арифметические операции над непрерывными на множестве функциями*). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на множестве X, то функции $f(x) \pm g(x)$ и $f(x)g(x)$ непрерывны на этом множестве. Если $g(x) \neq 0$ (не обращается в нуль) на множестве X, то частное $\frac{f(x)}{g(x)}$ также непрерывно в любой точке X.

Понятие обратной функции. Свойства взаимно обратных функций. Прежде чем сформулировать теорему о непрерывности обратной функции, напомним, как вводится понятие обратной функции и её основные свойства.

Опр. 1 (*обратной функции*). Пусть функция $f(x)$ определена на множестве X и имеет множество значений Y. Если для любого элемента y из множества Y существует единственный элемент $x \in X$ (т. е. отображение $f: X \to Y$ является взаимно однозначным), то говорят, что на множестве Y задана *обратная функция* $x = f^{-1}(y)$, которая каждому $y \in Y$ ставит в соответствие элемент $x \in X$ такой, что $f(x) = y$.

Можно называть обратной функцию, полученную из равенства $x = f^{-1}(y)$ заменой x на y, а y, наоборот, на x (в средней школе так и делают, мотивируя это тем, что независимую переменную принято обозначать через x, а зависимую – через y). Если функция $f(x)$ имеет обратную функцию, то $f(x)$ называют *обратимой*, а пару функций $f(x)$ и $f^{-1}(x)$ – *взаимно обратными* функциями.

Пример 170. Для функции $y = \sin x$, рассмотренной на отрезке $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, обратной будет функция $y = \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$. $\square$

Пример 171. Обратной функцией к показательной функции $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), $x \in \mathbb{R}$, является логарифмическая функция $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), $x > 0$. $\square$

Пример 172. Линейная функция $y = ax + b$ имеет при $a \neq 0$ обратную функцию, также являющуюся линейной: $y = (x - b)/a$, $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Пример 173. Функция $y = x^2$ на всём множестве действительных чисел не является обратимой, но если её рассмотреть, например, при

$x \geq 0$, то у неё будет существовать обратная функция $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$. $\square$

Взаимно обратные функции обладают следующими *свойствами.*

1. Графики взаимно обратных функций симметричны друг другу относительно прямой $y = x$. Это происходит в момент переобозначения x на y, а y на x (точка с координатами (x, y) переходит при такой симметрии в точку (y, x)).

2. Область определения функции $f(x)$ превращается в область значений для обратной функции. Аналогично с множеством значений, т. е.

$$D(f) = E(f^{-1}) = X, \quad E(f) = D(f^{-1}) = Y.$$

Пример 174. Например, отрезок $[-1, 1]$ является областью значений синуса и областью определения арксинуса, а отрезок $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ одновременно является областью определения синуса и областью значений арксинуса. $\square$

3. Справедливы тождества:

$$f^{-1}(f(x)) = x \ \ \forall\, x \in X; \quad f(f^{-1}(y)) = y \ \ \forall\, y \in Y.$$

Пример 175. Например, $e^{\ln x} \equiv x$ $(x > 0)$, $\ln(e^x) \equiv x$ $(x \in \mathbb{R})$, $\sin(\arcsin x) \equiv x$ $(x \in [-1, 1])$, $\arcsin(\sin x) \equiv x$ $(x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$. $\square$

4. Непрерывная функция имеет обратную функцию только в том случае, если она строго монотонна. При этом обратная функция непрерывна и имеет ту же монотонность, что и сама функция (т. е. взаимно обратные функции одновременно либо возрастают, либо убывают).

Пример 176. Например, функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{arctg} x$ возрастающие, а функции $\cos x$ и $\arccos x$ – убывающие. $\square$

Уточним свойство 4.

Теорема 4 (*о непрерывности обратной функции*). Пусть функция $y = f(x)$ определена, монотонно возрастает (убывает) и непрерывна на некотором промежутке X, и Y – её множество значений. Тогда на множестве Y определена однозначная обратная функция $x = f^{-1}(y)$, которая возрастает (убывает) и

непрерывна на Y.

5. Если одна из взаимно обратных функций является нечётной, то и обратная к ней также нечётна.

14.2 Понятие равномерно непрерывной функции. Теорема Кантора

«Познание начинается с удивления».
Аристотель (384 год до н.э.–322 год до н.э.) – древнегреческий философ, ученик Платона, воспитатель Александра Македонского.

Рассмотрим функцию $f(x)$, определённую на некотором промежутке X.

Опр. 2 (*равномерно непрерывной функции*). Функция $f(x)$ называется *равномерно непрерывной на множестве* X, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $x', x'' \in X$, удовлетворяющих условию $|x'' - x'| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

Разница между равномерной непрерывностью функции на множестве и обычной непрерывностью этой функции в каждой точке множества состоит в том, что в случае равномерной непрерывности значение δ (при заданном множестве X) зависит только от ε и не зависит от положения точек x', x'' в пределах этого множества.[1] В случае же обычной непрерывности функции на множестве в каждой точке x' существует свое δ, зависящее не только от ε, но и от x', такое, что если x'' отличается от x' менее, чем на δ, то значения функции в этих точках отличаются друг от друга менее, чем на ε.

Иными словами, выделяя суть определений и намеренно опуская области значений величин, чтобы подчеркнуть поря-

[1] Функция равномерно непрерывна на множестве, если, грубо говоря, можно гарантировать, что значения $f(x')$ и $f(x'')$ будут близки друг к другу (отличаться менее, чем на заданное ε) как только значения x' и x'' окажутся достаточно близки друг к другу (будут отличаться менее, чем на δ).

док следования кванторов, получим, что непрерывность функции в каждой точке x' множества X определяется как

$$\forall x'\ \forall \varepsilon\ \exists \delta:\ \forall x''\ \ |x''-x'|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x'')-f(x')|<\varepsilon\,,$$

что эквивалентно

$$\forall \varepsilon\ \forall x'\ \exists \delta:\ \forall x''\ \ |x''-x'|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x'')-f(x')|<\varepsilon\,,$$

в то время как для равномерной непрерывности в определении меняются местами второй и третий члены:

$$\forall\, \varepsilon\ \exists\, \delta:\ \forall x'\ \forall x''\ |x''-x'|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x'')-f(x')|<\varepsilon.$$

Любая равномерно непрерывная на некотором множестве функция является непрерывной на этом множестве. А вот обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Рассмотрим пример, где равномерная непрерывность устанавливается с помощью определения.

Пример 177. Доказать равномерную непрерывность линейной функции на заданном множестве:

$$y=ax+b,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Доказательство. Имеем

$$|f(x'')-f(x')|=|(ax''+b)-(ax'+b)|=|a||x''-x'|<|a|\delta.$$

Выберем любое $\varepsilon>0$, составим неравенство $|a|\delta<\varepsilon$ и найдём из него $\delta=\varepsilon/|a|$. Тогда получим, что $\forall x', x''\in\mathbb{R}$ из неравенства $|x''-x'|<\delta$ следует неравенство $|f(x'')-f(x')|<|a|\delta=\varepsilon$, что доказывает равномерную непрерывность функции на $\mathbb{R}$. $\square$

Опр. $\overline{2}$ (*отрицание определения равномерной непрерывности*). Функция $f(x)$ не является равномерно непрерывной на множестве X, если $\exists\,\varepsilon>0$ такое, что для любого сколь угодно малого $\delta>0$ найдутся точки $x', x''\in X$ такие, что $|x''-x'|<\delta$, но $|f(x'')-f(x')|\geq\varepsilon$.

В частности, функция не будет равномерно непрерывной на конечном интервале (a,b), если хотя бы в одной из граничных

точек этого интервала предел функции бесконечен или не существует.

Пример 178. Доказать, что функция не является равномерно непрерывной на заданном промежутке:

$$y = \frac{1}{x},\ x \in (0, 1].$$

Доказательство. Заметим, что на любом отрезке $[a, 1]$, где a – достаточно малое положительное число, функция равномерно непрерывна в силу теоремы Кантора, следовательно, равномерная непрерывность может нарушаться только в правой окрестности точки 0. Поэтому выберем две числовые последовательности $x'_n = 1/n$, $x''_n = 1/(n+1)$, сходящиеся при $n \to +\infty$ к этой точке. Причём так как $|x''_n - x'_n| = |1/(n+1) - 1/n| \to 0$, то для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ найдётся номер n_0 такой, что $\forall n \geq n_0$ будет выполнено $|x''_n - x'_n| < \delta$.

Рассмотрим теперь модуль разности значений функции в точках этих числовых последовательностей: $|f(x''_n) - f(x'_n)| = |(n+1) - n| = 1$. Значит, если в качестве ε взять любое положительное число, меньшее 1, то для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ найдутся точки $x'_n, x''_n \in (0, 1]$ такие, что $|x''_n - x'_n| < \delta$, но $|f(x''_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$, что и требовалось доказать. □

Достаточное условие равномерной непрерывности функции на сегменте даёт известная теорема Кантора.

Теорема 5. (*Теорема Ка́нтора*).[1] Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она и равномерно непрерывна на этом сегменте.

Пример 179. Функция $y = \dfrac{4x^2}{3x+1}$ непрерывна на сегменте $[0, 1]$, а следовательно, и равномерно непрерывна на нём. □

Это первое знакомство с равномерной непрерывностью, на уровне определения. Подробнее на свойствах равномерно непрерывных функций, включая необходимые и достаточные условия равномерной непрерывности, остановимся позже (см. Книгу 2).

[1] Георг *Кантор* (1845–1918) – немецкий математик, ученик Вейерштрасса. Наиболее известен как создатель теории множеств.

14.3 Задачи для самостоятельного решения

№588. [6, № 734] Доказать, что функция Дирихлé может быть задана следующим образом

$$\chi(x) = \lim_{m\to\infty}\,(\lim_{n\to\infty}\cos^n(\pi m!x))$$

и разрывна при каждом значении x $(n, m \in \mathbb{N})$.

№589. [6, № 735] Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = x \cdot \chi(x)$, где $\chi(x)$ – функция Дирихле. Построить эскиз графика функции.

№590. [6, № 736] Доказать, что функция Римана

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } x = \frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{если } x - \text{иррационально}, \end{cases}$$

где НОД$(|m|, n) = 1$ (т. е. $\frac{m}{n}$ – несократимая дробь) разрывна при каждом рациональном значении x и непрерывна при каждом иррациональном значении x. Постройте эскиз графика функции.

№591. [6, № 741] Обязательно ли будет разрывна в данной точке x_0 сумма двух функций $f(x) + g(x)$, если: а) функция $f(x)$ непрерывна, а функция $g(x)$ разрывна при $x = x_0$; б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ разрывны при $x = x_0$? Построить соответствующие примеры.

№592. [6, № 742] Обязательно ли произведение двух функций $f(x) \cdot g(x)$ терпит разрыв в данной точке x_0, если: а) функция $f(x)$ непрерывна, а функция $g(x)$ разрывна при $x = x_0$; б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ разрывны при $x = x_0$? Построить примеры.

№593. [6, № 743] Можно ли утверждать, что квадрат разрывной функции есть также разрывная функция? Построить пример всюду разрывной функции, квадрат которой есть непрерывная функция.

№594. [6, № 744(а,б,в)] Исследовать на непрерывность функции $f(g(x))$ и $g(f(x))$, если:

а) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ и $g(x) = 1 + x^2$;

б) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ и $g(x) = x(1 - x^2)$;

в) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ и $g(x) = 1 + x - [x]$.

№595. [6, № 745] Исследовать на непрерывность сложную функцию $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, если

$$f(u) = \begin{cases} u, & \text{если } 0 < u \leqslant 1; \\ 2 - u, & \text{если } 1 < u < 2, \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x - \text{рационально;} \\ 2 - x, & \text{если } x - \text{иррационально } (0 < x < 1). \end{cases}$$

№596. [6, № 746] Доказать, что если $f(x)$ – непрерывная функция, то $F(x) = |f(x)|$ есть также непрерывная функция.

№597. [6, № 751] Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a, +\infty)$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$, то эта функция ограничена в данном промежутке.

№598. [6, № 757] Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и $x_1, x_2, ..., x_n$ – любые значения из этого сегмента, то между ними найдётся число ξ такое, что

$$f(\xi) = \tfrac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)).$$

Используя определение, доказать равномерную непрерывность функции на заданном множестве:

№599. $y = \sin x,\ x \in \mathbb{R}$;

№600. $y = 1/x,\ x \in [1, +\infty)$;

№601. $y = x^2,\ x \in [a, b]$.

Доказать, что функция не является равномерно непрерывной на заданном множестве:

№602. $y = x^2,\ x \in \mathbb{R}$;

№603. $y = \ln x,\ x \in (0, 1]$;

№604. $y = \sin(1/x),\ x \in (0, 1]$;

№605. $y = x \cdot \sin x,\ x \in \mathbb{R}$.

Разные задачи:

№606. [Устный вступит. экзамен, ВМК МГУ] Решить уравнение, используя свойства взаимно обратных функций:

$$x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x - 1}.$$

14.4 Ответы и решения

588. Разрывность функции Дирихле в каждой точке мы доказывали на предыдущем семинаре, поэтому здесь докажем, что данное представление функции Дирихле полностью отвечает её классической форме

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ - рационально;} \\ 0, & \text{если } x \text{ - иррационально.} \end{cases}$$

1) Пусть $x = \frac{p}{q}$ – рациональное число, тогда при достаточно больших m множитель q сократится и получим

$$m!x = m! \cdot \frac{p}{q} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (q-1)(q+1) \cdot \ldots \cdot mp.$$

При этом число справа – всегда чётное (при достаточно больших m), поэтому $\cos(\pi m!x) = 1$ и тогда $\chi(x) = 1$.

2) Если же x – иррационально, то число $m!x$ не является целым ни при каких m, следовательно, $|\cos(\pi m!x)| < 1$, но тогда $\lim\limits_{n \to +\infty} \cos^n(\pi m!x) = 0$, т. е. $\chi(x) = 0$.

589. 1) Пусть $x_0 \neq 0$ – произвольно. Рассмотрим последовательность $\{x'_n\}$ рациональных чисел, сходящуюся к x_0, и другую последовательность $\{x''_n\}$ иррациональных чисел, также сходящуюся к точке x_0. Тогда $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x'_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} x'_n = x_0$, в то время как $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x''_n) = 0$. Следовательно, x_0 – точка разрыва (2-го рода).

2) Пусть $x_0 = 0$, тогда, переходя к пределу при $x \to 0$ в очевидном неравенстве $0 \leqslant |f(x) - f(0)| = |f(x)| = |x \cdot \chi(x)| \leqslant |x|$, получаем, что $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$. Таким образом, $x_0 = 0$ – единственная точка непрерывности функции $f(x)$. Эскиз графика постройте самостоятельно.

590. 1) Пусть $x_0 = \dfrac{m}{n}$ – любое рациональное число ($\dfrac{m}{n}$ – несократимая дробь). Покажем, что функция разрывна в этой точке. Очевидно, что можно построить последовательность рациональных чисел $\dfrac{mk+1}{nk} \to \dfrac{m}{n}$ при $k \to +\infty$. А так как $\lim\limits_{k \to +\infty} f\left(\dfrac{mk+1}{nk}\right) = \lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{1}{nk} = 0 \neq f(x_0) = \dfrac{1}{n}$, то рацио-

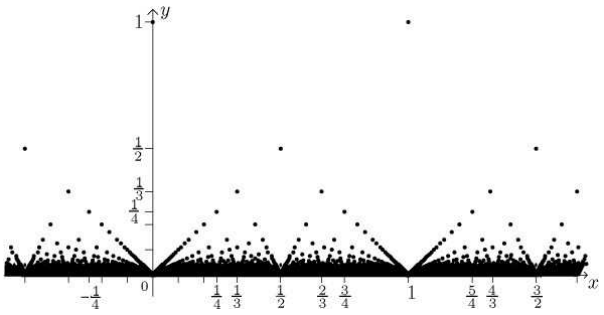

Рис. 5: Функция Римана.

нальная точка $\dfrac{m}{n}$ является точкой разрыва функции.

2) Пусть $x_0 = \alpha$ (иррациональное число). Рассмотрим произвольную последовательность рациональных чисел $\left\{\dfrac{m_k}{n_k}\right\} \to \alpha$. Но тогда $\lim\limits_{k\to+\infty} n_k = +\infty$ и $\lim\limits_{k\to+\infty} f\left(\dfrac{m_k}{n_k}\right) = \lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{1}{n_k} = 0 = f(\alpha)$. А так как $f(x) = 0$ в иррациональных точках, то для любой последовательности $\{x_k\} \to \alpha$ и состоящей как из рациональных, так и иррациональных чисел, будет выполняться $\lim\limits_{k\to+\infty} f(x_k) = f(\alpha) = 0$. Таким образом, функция $f(x)$ непрерывна при любом иррациональном x. График функции симметричен относительно оси ординат. Эскиз графика имеет вид (Рис. 5).

591. а) Да. *1-й способ.* Пусть $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$ – две последовательности, сходящиеся к x_0, и такие, что $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x'_n) = A$, $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x''_n) = B$, где A и B – числа или символы $+\infty$ или $-\infty$, причём $A \neq B$. Очевидно, что такие последовательности существуют для любой разрывной функции $g(x)$. Так как пределы

$$\lim_{n\to+\infty} (f(x'_n) + g(x'_n)) = f(x_0) + A$$

и

$$\lim_{n\to+\infty} (f(x''_n) + g(x''_n)) = f(x_0) + B$$

не равны друг другу или хотя бы один из них бесконечный, то

сумма $f(x)+g(x)$ – разрывная при $x=x_0$ функция.

2-й способ. Предположим, от противного, что функция $f(x)+g(x)$ непрерывна в точке x_0, тогда в этой точке разность двух непрерывных функций $f(x)+g(x)$ и $f(x)$ является непрерывной функцией, т е. $g(x)$ – непрерывна в x_0, что противоречит условию.

б) Нет. Например, рассмотрим функции $f(x)=-\frac{1}{x-x_0}$ и $g(x)=x+\frac{1}{x-x_0}$ при $x\neq x_0$, в точке x_0 они определяются так: $f(x_0)=g(x_0)=\frac{x_0}{2}$. Очевидно, что обе функции разрывны при $x=x_0$, в то время как их сумма $f(x)+g(x)=x$ – непрерывна при всех $x\in\mathbb{R}$.

592. а) Нет. Например, $f(x)\equiv 0$, $g(x)=\operatorname{sgn}x$, $x_0=0$.

б) Нет. Например,

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<0;\\ 1, & \text{если } x\geqslant 0,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x<0;\\ 0, & \text{если } x\geqslant 0.\end{cases}$$

593. 1) Нет. Например, $f(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\geqslant 0;\\ -1, & \text{если } x<0,\end{cases}$, $f^2(x)\equiv 1$, $x\in\mathbb{R}$. И вообще, если $f(x_0-0)=-f(x_0+0)=f(x_0)\neq 0$, то $f(x)$ разрывна при $x=x_0$, но $f^2(x_0-0)=f^2(x_0+0)=f^2(x_0)$, т. е. $f^2(x)$ – непрерывна при $x=x_0$.

2) Определим функцию $f(x)$ следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{если x}-\text{рационально;}\\ -1, & \text{если x}-\text{иррационально.}\end{cases}$$

Эта функция разрывна при каждом значении $x\in\mathbb{R}$, но $f^2(x)\equiv 1$, т. е. непрерывна при всех x.

594. а) Так как $f(x)=\operatorname{sgn}x$, $g(x)=1+x^2$, то $f(g(x))=\operatorname{sgn}(1+x^2)\equiv 1$ – непрерывна при всех $x\in\mathbb{R}$.

$$g(f(x))=1+(\operatorname{sgn}x)^2=\begin{cases}2, & \text{если } x>0;\\ 1, & \text{если } x=0;\\ 2, & \text{если } x<0,\end{cases}$$

т. е. $x=0$ – точка устранимого разрыва.

б) Так как $f(x)=\operatorname{sgn}x$, $g(x)=x(1-x^2)$, то $f(g(x))=$

$$= \operatorname{sgn}(x(1-x^2)) = \begin{cases} 1, & \text{если } -1 < x < 0 \text{ или } 1 < x < +\infty; \\ 0, & \text{если } x \in \{-1; 0; 1\}; \\ -1, & \text{если } -\infty < x < -1 \text{ или } 0 < x < 1, \end{cases}$$

т. е. $x = 0; \pm 1$ – точки разрыва 1-го рода. Далее, $g(f(x)) = \operatorname{sgn} x \cdot (1 - \operatorname{sgn}^2 x) \equiv 0$ – непрерывна.

в) Так как $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $g(x) = 1 + x - [x]$, то $f(g(x)) = \operatorname{sgn}(1 + x - [x]) = \operatorname{sgn}(1 + \{x\}) \equiv 1$ – непрерывна при всех x. Далее, $g(f(x)) = 1 + \operatorname{sgn} x - [\operatorname{sgn} x] = 1 + \{\operatorname{sgn} x\} \equiv 1$ – непрерывна.

595. Формально вычисляя $f(\varphi(x))$, находим

$$f(\varphi(x)) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если } 0 < \varphi(x) \leqslant 1; \\ 2 - \varphi(x), & \text{если } 1 < \varphi(x) < 2, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x, & \text{если } x - \text{рац.} \in (0, 1); \\ 2 - (2 - x), & \text{если } x - \text{иррац.} \in (0, 1), \end{cases}$$

т. е., упрощая, $f(\varphi(x)) \equiv x$, если $x \in (0, 1)$. Эта функция непрерывна на интервале $(0, 1)$.

596. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольно малое число. В силу непрерывности $f(x)$ для этого ε найдётся $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$: как только $|x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Рассмотрим

$$|F(x) - F(x_0)| = ||f(x)| - |f(x_0)|| \leqslant |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

если $|x - x_0| < \delta$, т. е. $F(x)$ – также непрерывная функция.

597. Так как существует конечный предел, то это означает, что $\forall \varepsilon > 0 \; \exists E > 0 : \forall x > E \; |f(x) - A| < \varepsilon$. Отсюда следует, что $|f(x)| - |A| \leqslant |f(x) - A| < \varepsilon$, т. е. $|f(x)| < |A| + \varepsilon$ при всех $x > E$. Если обозначить $M = \max(|A| + \varepsilon, \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant E} \{f(x)\})$, то $|f(x)| \leqslant M$ $\forall x \geqslant a$.

598. Пусть $m = \min(f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n))$, $M = \max(f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n))$, тогда по свойству среднего арифметического

$$m \leqslant \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)) \leqslant M.$$

По теореме Больцано–Коши, функция, непрерывная на $[a, b]$, принимает на каждом интервале $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ все промежу-

точные значения между $f(\alpha)$ и $f(\beta)$, поэтому в данной задаче функция $f(x)$ принимает все промежуточные значения между m и M. Следовательно, найдётся $\xi \in [a, b]$ такое, что

$$f(\xi) = \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)).$$

599. Имеем

$$|f(x'') - f(x')| = |\sin x'' - \sin x'| = \left|2 \sin \frac{x'' - x'}{2} \cos \frac{x'' + x'}{2}\right| =$$

$$= \left|2 \sin \frac{x'' - x'}{2}\right| \left|\cos \frac{x'' + x'}{2}\right| \leq 2 \left|\sin \frac{x'' - x'}{2}\right| \leq 2 \left|\frac{x'' - x'}{2}\right| =$$

$= |x'' - x'|$. Выбрав произвольное $\varepsilon > 0$ и положив $\delta = \varepsilon$, получим, что $\forall x', x'' \in \mathbb{R}$ из неравенства $|x'' - x'| < \delta$ следует $|f(x'') - f(x')| < \delta = \varepsilon$.

600. Возьмём любое $\varepsilon > 0$ и подберём для него значение $\delta(\varepsilon)$ такое, чтобы $\forall x', x'' \geq 1$, удовлетворяющих неравенству $|x'' - x'| < \delta$, выполнялось неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$. Поскольку

$$|f(x'') - f(x')| = \left|\frac{1}{x''} - \frac{1}{x'}\right| = \left|\frac{x' - x''}{x''x'}\right| < \left|\frac{x' - x''}{1 \cdot 1}\right| < \delta,$$

то для выполнения неравенства $|(1/x'') - (1/x')| < \varepsilon$ достаточно взять $\delta = \varepsilon$.

601. Возьмём любое $\varepsilon > 0$ и подберём для него значение $\delta(\varepsilon)$ такое, чтобы $\forall x', x'' \in [a, b]$, удовлетворяющих $|x'' - x'| < \delta$, выполнялось неравенство $|(x'')^2 - (x')^2| < \varepsilon$. Имеем

$$|(x'')^2 - (x')^2| = |x'' - x'||x'' + x'| = |x'' - x'||(x'' - x') + 2x'| \leqslant$$

$$\leqslant |x'' - x'|(|x'' - x'| + 2|x'|) < \delta(\delta + 2|x'|) \leqslant$$

(так как для любого $x' \in [a, b]$ верно $|x'| \leqslant \max(|a|, |b|) = c$)

$$\leqslant \delta(\delta + 2c) < \varepsilon,$$

если выбрать $0 < \delta < \sqrt{c^2 + \varepsilon} - c$.

602. Заметим, что на любом сколь угодно большом отрезке $[a, b]$ функция равномерно непрерывна по теореме Кантора. Поэтому нарушаться равномерная непрерывность в данном случае может лишь в окрестности бесконечно удалённых точек $\pm\infty$. В силу чётности функции достаточно рассмотреть окрестность точки $+\infty$. Итак, подберем две числовые последовательности $x'_n = \sqrt{n}$, $x''_n = \sqrt{n+1}$, стремящиеся при $n \to +\infty$ к $+\infty$ такие, что разность соответствующих членов стремится к нулю:

$$|x''_n - x'_n| = \left|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right| = \left|\frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right| \to 0.$$

В то же время $|f(x''_n) - f(x'_n)| = |(n+1) - n| = 1$. Значит, если в качестве ε взять любое положительное число, меньшее 1, то для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ найдутся точки $x'_n, x''_n \in (0, 1]$ такие, что $|x''_n - x'_n| < \delta$, но $|f(x''_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$.

603. Заметим, что на любом отрезке $[a, 1]$, где a – достаточно малое положительное число, функция равномерно непрерывна в силу теоремы Кантора, следовательно, равномерная непрерывность может нарушаться только в правой окрестности точки 0. Выберем две последовательности $x'_n = e^{-n}$, $x''_n = e^{-n-1}$, сходящиеся при $n \to +\infty$ к этой точке. Причём так как $|x''_n - x'_n| = \left|e^{-n-1} - e^{-n}\right| \to 0$, то для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ найдётся номер n_0 такой, что $\forall n \geq n_0$ будет выполнено $|x''_n - x'_n| < \delta$. В то же время модуль разности значений функции в точках этих числовых последовательностей не стремится к нулю, оставаясь равным единице: $|f(x''_n) - f(x'_n)| = |(n+1) - n| = 1$. Значит, если в качестве ε взять любое положительное число, меньшее 1, то для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ найдутся точки $x'_n, x''_n \in (0, 1]$ такие, что $|x''_n - x'_n| < \delta$, но $|f(x''_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$.

604. Поскольку на любом отрезке $[a, 1] \subset (0, 1]$, где a – достаточно малое положительное число, функция равномерно непрерывна в силу теоремы Кантора, то равномерная

непрерывность может нарушаться лишь в окрестности точки 0. Поэтому выберем две последовательности $x'_n = \dfrac{1}{2\pi n}$, $x''_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$, сходящиеся при $n \to +\infty$ к этой точке. Так как $|x''_n - x'_n| = \left| \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} - \dfrac{1}{2\pi n} \right| \to 0$, то для любого $\delta > 0$ найдётся номер n_0 такой, что $\forall n \geq n_0$ будет выполнено $|x''_n - x'_n| < \delta$.

При этом $|f(x''_n) - f(x'_n)| = |1 - 0| = 1$. Значит, если в качестве ε взять любое положительное число, меньшее 1, то для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ найдутся точки $x'_n, x''_n \in (0, 1]$ такие, что $|x''_n - x'_n| < \delta$, но $|f(x''_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$.

605. Так как на любом сколь угодно большом, но конечном отрезке функция равномерно непрерывна по теореме Кантора, то нарушаться равномерная непрерывность может лишь в окрестности бесконечно удалённых точек $\pm\infty$. Выберем две числовые последовательности $x'_n = 2\pi n$, $x''_n = 2\pi n + \dfrac{1}{2\pi n} \to +\infty$, причём $|x''_n - x'_n| = \dfrac{1}{2\pi n} \to 0$ при $n \to +\infty$. При достаточно большом n имеем:

$$|f(x''_n) - f(x'_n)| = |x'' \sin x'' - x' \sin x'| =$$

$$= \left| \left(2\pi n + \frac{1}{2\pi n} \right) \sin \left(2\pi n + \frac{1}{2\pi n} \right) - 2\pi n \sin 2\pi n \right| =$$

$$= \left| 2\pi n \sin \frac{1}{2\pi n} + \frac{1}{2\pi n} \sin \frac{1}{2\pi n} \right| = 2\pi n \sin \frac{1}{2\pi n} + \frac{1}{2\pi n} \sin \frac{1}{2\pi n} >$$

$> \dfrac{\sin \frac{1}{2\pi n}}{\frac{1}{2\pi n}} > \frac{1}{2}$, так как $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sin \frac{1}{2\pi n}}{\frac{1}{2\pi n}} = 1$. В качестве ε можно взять любое число $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$.

606. Перепишем уравнение в виде: $\frac{x^3+1}{2} = \sqrt[3]{2x-1}$. Найдём обратную функцию к $y = \sqrt[3]{2x-1}$: $x = \frac{y^3+1}{2}$, т. е. $f^{-1}(x) = \frac{x^3+1}{2}$. $x \in \mathbb{R}$. Уравнение имеет вид $f^{-1}(x) = f(x)$. Поскольку графики взаимно обратных возрастающих функций пересекаются в точках прямой $y = x$, то уравнение равносильно более простому $f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow x^3 - 2x + 1 = 0$, решая которое находим $x \in \{1; \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\}$.

Проверьте свои знания!

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

1. Сформулировать определение граничной точки и границы ∂D числового множества D. Возможно ли, чтобы $D \subset \partial D$, $D \supset \partial D$, $D = \partial D$? Если возможно, то привести пример, если нет, то обосновать.

2. Сформулировать понятие предела числовой последовательности и найти предел

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n\cdot\arccos\frac{n^2}{n^2+1}\right).$$

3. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена и имеет вид $x_n = y_n + z_n$, где $\{y_n\}$ монотонно возрастает, а $\{z_n\}$ монотонно убывает. Верно ли, что $\{x_n\}$ сходится? (Сформулировать определения ограниченной, монотонной и сходящейся последовательностей.)

4. Сформулировать критерий Коши (или его отрицание) и с его помощью исследовать сходимость последовательности

$$x_n = \operatorname{arctg}\frac{1}{\ln 2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{\ln 3} + ... + \operatorname{arctg}\frac{1}{\ln n} \quad (n = 2, 3, ...).$$

5. Сформулировать понятие конечного предела функции в конечной точке и вычислить предел функции

$$\text{а)}\ \lim_{x\to1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1};\quad \text{б)}\ \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}.$$

6. Дать определение главного члена последовательности. Найти главный член при $x \to 0$ функции

$$y = \arcsin\left(\ln\frac{2x^3+x+2}{x+2}\right).$$

7. Найти и охарактеризовать все точки разрыва функции:

$$f(x) = \frac{1}{e^{\frac{x}{x^2-1}-1}}\cdot[x].$$

8. Используя определение, исследовать на равномерную непрерывность функцию на заданном множестве

$$y = \sin(1/x^5),\ \ x \in (0, 1].$$

P.S. Решения задач разобраны в пособии.

Предметный указатель

Алгебраические и трансцендентные числа, 114
Ареасинус, 33
Арифметические операции:
  над действительными числами, 102
  над непрерывными функциями, 383
  над производными, 24
  над сходящимися последовательностями, 149
Асимптотическое поведение функций, 353
Бесконечно большая (малая) функция:
  определение, 290, 354
  свойства, 355
Бесконечно большая (малая) последовательность:
  определение, 151
  свойства, 152
Бином Ньютона $(a+b)^n$, 53
Больцано–Вейерштрасса теорема, 261
Внешняя точка, 111
Внутренняя точка, 110
Выпуклая оболочка, 113
Выпуклое множество, 112
Гиперболические функции, 24
Гиперболические функции, формулы, 46
Гиперболические подстановки, 62
Главный член б. м. функции, 362
Граничная точка, 111
Действительное число, 100
Дифференциальное исчисление, 21
Дифференцируемость в точке, 22
Замена переменной при дифференцировании, 31
Замыкание множества, 112
Замкнутое множество, 111
Изолированная точка, 110
Канторова лестница, 379
Кардинальное число, 113
Компакт, 112
Критерий Коши сходимости (расходимости) последовательности, 234
Кусочно непрерывная функция, 379
Кванторы, 116
Математический анализ, 21
Мера множества, 122
Метод математической индукции, 72
Методы вычисления предела функции:
  соотношения эквивалентности, 314
Методы вычисления предела последовательности:
  для рекуррентных последовательностей, 174
  формулы сокращённого

умножения, 177
переход к пределу функции, 189
показательно-степенного вида, 186
предел интегральной суммы, 192
предел не существует, 185
пределы $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(n)g(n))$, где $f(n)$ –огр., а $g(n)$ – б.м.п., 183
предварительные преобразования, 179
принцип двусторонней ограниченности, 183
соотношения эквивалентности, 181
теорема Штольца, 238
умножение на сопряжённое выражение, 178
замена переменной, 176
Множество $\mathbb{R}$, 106
Модуль, 93
Монотонная последовательность:
определение, 215
свойства, 216
теорема Вейерштрасса, 217
Мощность континуум, 114
Мощность множества, 113
Наибольший (наименьший) элементы последовательности, 218
Неэлементарные функции, определяемые пределом последовательности, 153
Неопределённость:
вида 1^∞, 316
вида $\frac{0}{0}$, 307
вида $\frac{\infty}{\infty}$, 238, 307
Непрерывность функции:
на множестве, 377
свойства, 383
в точке, 376
Неравенства Бернулли, 67
Неравенства Гёльдера, 72
Неравенство Чебышёва, 70
Неравенство Коши, 64
Неравенство Коши-Буняковского, 66
Неравенство Минковского, 68
Неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным, 67
Неравенство между средними геометрическим и гармоническим, 65
Неравенство о сумме взаимно обратных чисел, 55
Неравенство треугольника, 56
Нижний (верхний) пределы последовательности:
определение, 262
свойства, 262
о-малое, О-большое, О*, 356
Обратная функция, 26, 400
Обратные тригонометрические функции, 57
Ограниченные последовательности, 140
Ограниченное множество, 112,

118
Окрестность точки, 109
Операции над множествами, 108
Открытое множество, 110
Подпоследовательности:
определение, 259
свойства, 260
Подпоследовательность, 259
Показательно-степенная функция, 27
Предел функции:
бесконечный, по Гейне, 285
бесконечный, по Коши, 284
односторонний, 286
определение, по Гейне, 283
определение, по Коши, 282
приёмы и методы вычисления, 304
свойства пределов, 289
замечательные пределы, 305
Предел последовательности:
единственность, 148
не существует, 185
определение, 145, 169
Предельная точка, 109, 260
Предельный переход в неравенствах (последовательности), 150
Предварительное логарифмирование, 27, 29
Принцип двусторонней ограниченности, 150, 183
Производная (определение), 22
Производная обратной функции, 26
Производная показательно-степенной функции, 27
Производная произведения n функций, 29
Производная сложной функции, 25, 32
Рациональное число, 100
Раскрытие неопределённостей:
0^0, ∞^0, 1^∞, 186
$\frac{\infty}{\infty}$, 170, 238
$\infty - \infty$, 178
Равномерная непрерывность, 402
Разрывная функция, 380
Счётное множество, 114
Сходящаяся последовательность:
бесконечно малая, 152
ограниченность, 148
определение, 145, 152
свойства, 148
Сигнум, 25
Символ Ландау, 359
Соотношения эквивалентности, 314
Среднее арифметическое, геометрическое, гармоническое, квадратичное, 62, 239
Среднее степенное, 62
Средние величины и их пределы, 239

Таблица производных, 23
Теорема Больцано–Вейерштрасса, 261
Теорема Штольца, 238
Теорема сравнения для последовательностей, 237
Теорема:
  Кантора, 115, 404
  необходимое и достаточное условие существования предела в точке, 288
  полиномиальная, 54
  Штольца, 238
  Вейерштрасса о сходимости монотонной ограниченной последовательности, 217
Теоремы о непрерывных функциях:
  1-я теорема Вейерштрасса, 384
  2-я теорема Вейерштрасса, 384
  арифметические операции, 383
  локальная ограниченность, 383
  локальное сохранение знака, 383
  непрерывность обратной функции, 401
  непрерывность сложной функции, 384
Точки разрыва функции:
  определение, 380
  разрыв 1-го рода, 381
  разрыв 2-го рода, 381
  устранимый разрыв, 381
Точки разрыва монотонной функции, 382
Точные грани множества, 120
Транснеравенства, 68
Тригонометрические подстановки, 61

Факториал, 53
Формула $(a_1+a_2+...+a_n)^2$, 51
Формула a^n+b^n $(n=2k+1)$, 52
Формула a^n-b^n $(n=2k)$, 53
Формула a^n-b^n $(n\in\mathbb{N})$, 52
Функции элементарные, 21
Функции одного порядка малости (роста), 359
Функция Дирихле, 407
Функция Римана, 292, 408
Функция одной переменной:
  график, 276
  колебание функции, 280
  монотонность, 276
  наибольшее (наименьшее) значения, 280
  ограниченность, 278
  определение, 276
  точные грани, 279

Частичный предел, 260
Числа Фибоначчи, 143
Числовые последовательности, 140
Эквивалентные функции, 360

Список литературы

[1] *Беркович Ф.Д., Федий В.С., Шлыков В.И.* Задачи студенческих математических олимпиад с указаниями и решениями. Учеб. пособие. – Ростов н/Д: Феникс, 2008.

[2] *Бутузов В.Ф.* Лекции по математическому анализу. Часть 1. Учеб. пособие. – М.: Физический факультет МГУ, 2012.

[3] *Бутузов В.Ф., Левашова Н.Т., Шапкина Н.Е.* Равномерная непрерывность функций одной переменной. Пособие для студентов I курса. Москва, Физфак МГУ, 2010.

[4] *Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А.* Математический анализ в задачах и упражнениях. В 2 том. Том 1. Дифференциальное и интегральное исчисление / Под ред. В. А. Садовничего. – М.: МЦНМО, 2017. – 413 с.

[5] *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 1: Учеб. пособие для втузов. – 5-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 1997. – 304 с.: ил.

[6] *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Учеб. пособие. 13-е изд., испр. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1997. – 624 с.

[7] *Зорич В.А.* Математический анализ. Часть I. Гл. V. Дифференциальное исчисление. 3-е изд. — М.: МЦНМО, 2001.

[8] *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х.* Математический анализ. В 2 ч. Часть 1 / Учебник для академического бакалавриата. – 4-е изд. — М.: Издательство Юрайт, 2013. – 660 с. – (Бакалавр. Углублённый курс).

[9] *Краснова С.А., Уткин В.А.* Основы математического анализа. Учебное пособие. – М.: РГГУ, 2010. – 551 с.

[10] *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. В 3 томах. Том 1: Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. – М.: Дрофа, 2003. – 704 с.

[11] Лекции по математическому анализу; Учеб. для вузов/ Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Под ред. В.А. Садовничего. – 5-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2004. – 640 с. – (Классический университетский учебник)

[12] *Никитин А.А.* Математический анализ. Сборник задач: учеб. пособие для академического бакалавриата. – М.: Издательство Юрайт, 2021. – 353 с. – (Серия: Бакалавр. Академический курс).

[13] *Никитин А.А., Фомичев В.В.* Математический анализ. Углублённый курс. Учебник и практикум. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2021. – 462 с.

[14] *Пантаев М.Ю.* Матанализ с человеческим лицом, или Как выжить после предельного перехода. Полный курс математического анализа. Том 1. – М.: ЛИБРОКОМ, 2012. – 368 с.

[15] *Садовничая И.В., Фоменко Т.Н., Хорошилова Е.В.* Математический анализ: Вещественные числа и последовательности: Учеб. пособие для академического бакалавриата / Под общей ред. В.А. Ильина. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2021. – 109 с. – (Серия: Бакалавр. Академический курс).

[16] *Садовничая И.В., Фоменко Т.Н., Хорошилова Е.В.* Математический анализ: Дифференцирование функций одной переменной: Учеб. пособие для академического бакалавриата. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2021. – 156 с. – (Серия: Бакалавр. Академический курс).

[17] *Садовничий В.А., Подколзин А.С.* Задачи студенческих олимпиад по математике. – М.: Наука, 1978.

[18] *Сизый С.В.* Математические задачи. Студенческие олимпиады математико-механического факультета Уральского госуниверситета. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 128 с.

[19] Справочное пособие по высшей математике. В 5 томах. Том 1. Математический анализ: введение в анализ, производная, интеграл. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. – М., 2001. – 360 с.

[20] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебник для вузов / Г. М. Фихтенгольц. В 3-х томах. Том 1. – 15-е изд., стер. — СПб.: Лань, 2021. – 608 с.: ил.

[21] *Хорошилова Е.В.* Математический анализ: Тождественные равенства и неравенства и их применение: В помощь практическим занятиям: Учеб. пособие для студентов университетов. – М.: МАКС Пресс, 2016. – 272 с.

[22] *Шибинский В.М.* Примеры и контрпримеры в курсе математического анализа. – М.: Высш. шк., 2007. – 543 с.

Рекомендуемые книги автора по другим разделам математического анализа:

[23] *Хорошилова Е.В.* Математический анализ: Неопределённый интеграл / Учебное пособие для академического бакалавриата. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Юрайт, 2021. – 187 с. – (Серия: Бакалавр. Академический курс)

[24] *Садовничая И.В., Хорошилова Е.В.* Математический анализ: Определённый интеграл. В 2 ч. Часть 1 / Учебное пособие для академического бакалавриата. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2021. – 242 с. – (Серия: Бакалавр. Академический курс)

[25] *Садовничая И.В., Хорошилова Е.В.* Математический анализ: Определённый интеграл. В 2 ч. Часть 2 / Учебное пособие для академического бакалавриата. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2021. – 199 с. – (Серия: Бакалавр. Академический курс)

Книга содержит 179 примеров и 606 задач для самостоятельной работы (с решениями).

Учебное издание

ХОРОШИЛОВА Елена Владимировна

КУРС СЕМИНАРОВ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
(Самоучитель)

Книга 1:

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА И ИХ МНОЖЕСТВА. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ФУНКЦИИ ОДНОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ: ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Учебное пособие для очной и дистанционной форм обучения студентов университетов

Напечатано с готового оригинал-макета
Изд. отдел факультета ВМК МГУ
Лицензия ИД № 00510 от 01.12.99 г.
Подписано к печати 2021 г.
Формат 60x88 1/16. Усл.печ.л. 9,5. Тираж 650 экз. Заказ .

119992 Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова,
2-й учебный корпус, 527 к.
Тел. 939-3890, 939-3891. Тел./Факс 939-3891.